



Modélisation morphologique de matériaux bi-phasés par seuillage de champs aléatoires

E. Roubin

Stage de fin de Master 2

Soutenance du 25 juin 2010

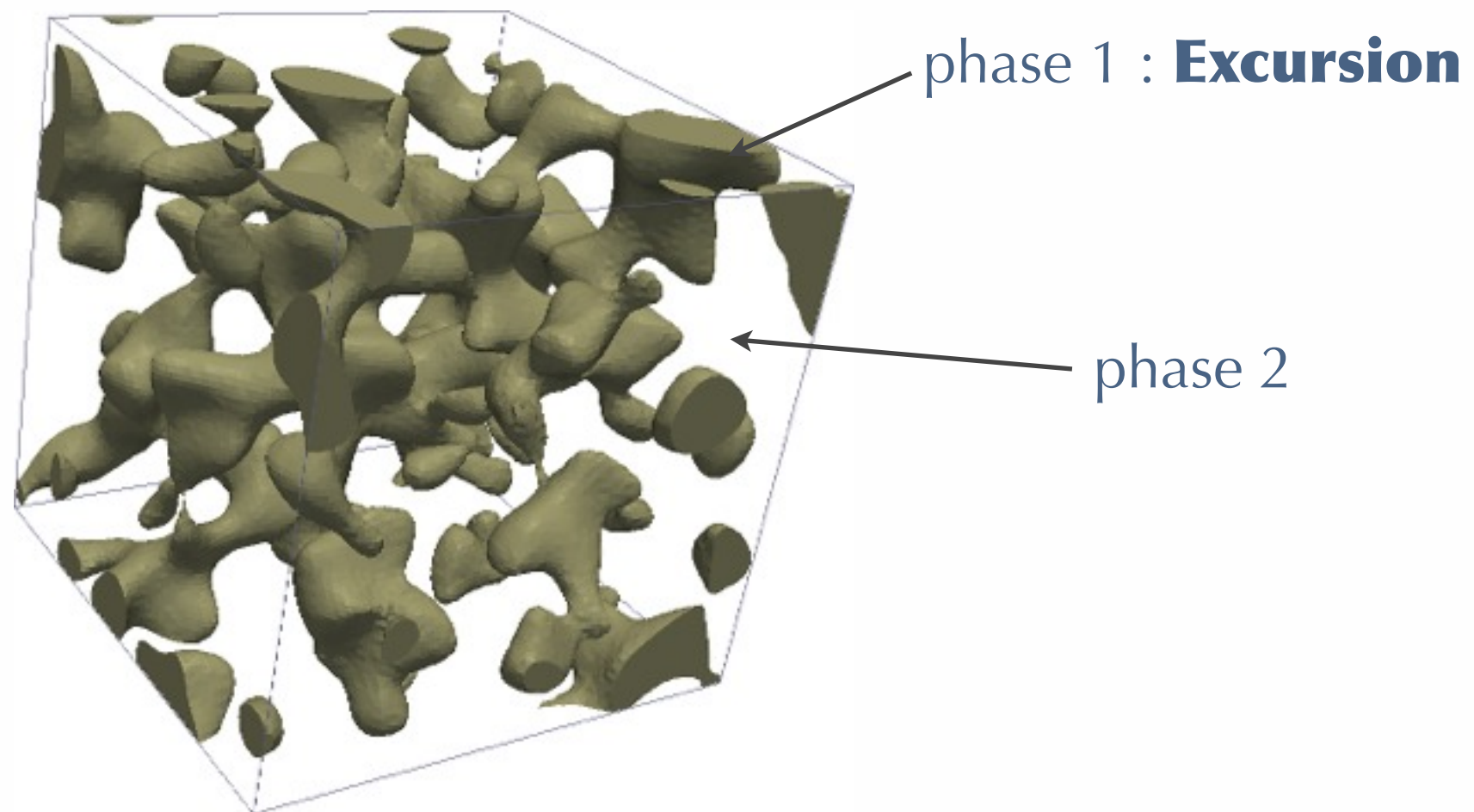
Encadrants : J.-B. Colliat, A. Ibrahimbegovic

beton ciment+matrice

phase 1 -> granulat

Objectifs

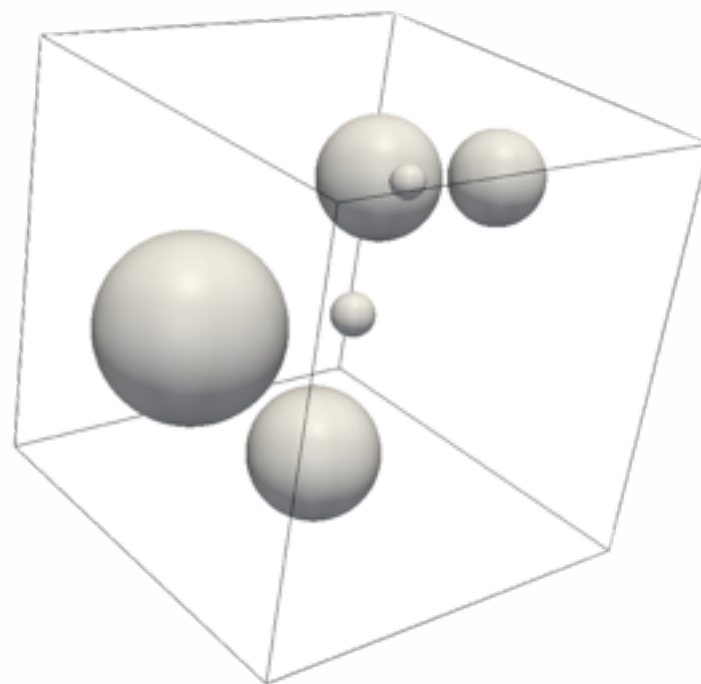
Créer un **modèle morphologique** permettant de décrire un **matériau bi-**
phasé.



Contrôler les **caractéristiques géométriques et topologiques** de la morphologie.

- Modèle existant : **générations de sphères non recouvrantes**

[Benkemoun *et al.*, 2007]
[Laborderie *et al.*, 2009]



Les inconvénients

- Fraction volumique limitée
- Géométrie régulière
- Modèle coûteux en paramètres $\mathcal{O}(N)$

- Problématique** : trouver une alternative à ce modèle.



Principe et caractéristiques du modèle

- Principe du seuillage
- Influences des différences paramètres du modèle
- Caractéristiques géométriques et topologiques des excursions



Mise en oeuvre numérique et validation

- Décomposition de Karhunen-Loève
- Calcul des caractéristiques géométriques
- Validation



Conclusions et perspectives



Principe et caractéristiques du modèle

- Principe du seuillage
- Influences des différences paramètres du modèle
- Caractéristiques géométriques et topologiques des excursions



Mise en oeuvre numérique et validation

- Décomposition de Karhunen-Loève
- Calcul des caractéristiques géométriques
- Validation

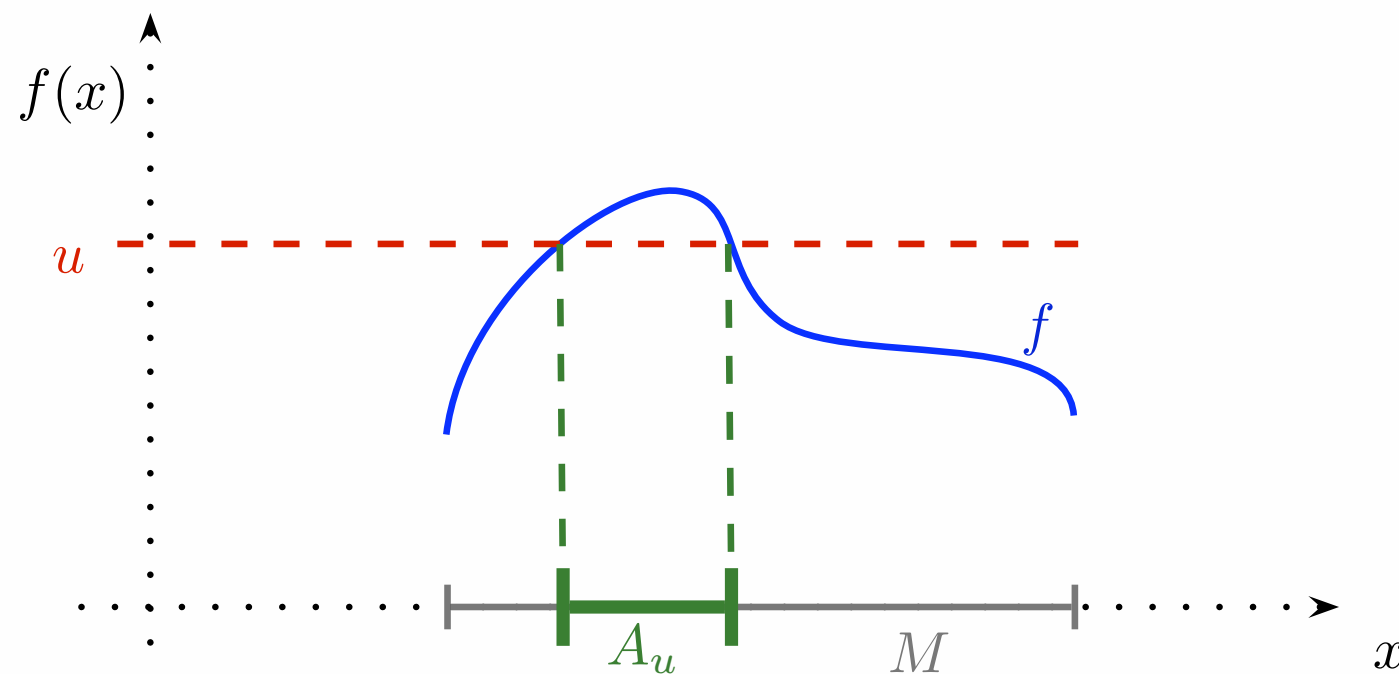


Conclusions et perspectives

Seuillage à partir d'un champ aléatoire corrélé

Excursion : géométrie obtenue suite au seuillage d'une réalisation.

Principe : garder uniquement les valeurs de la réalisation **supérieures** à une certaine valeur appelée **seuil**.



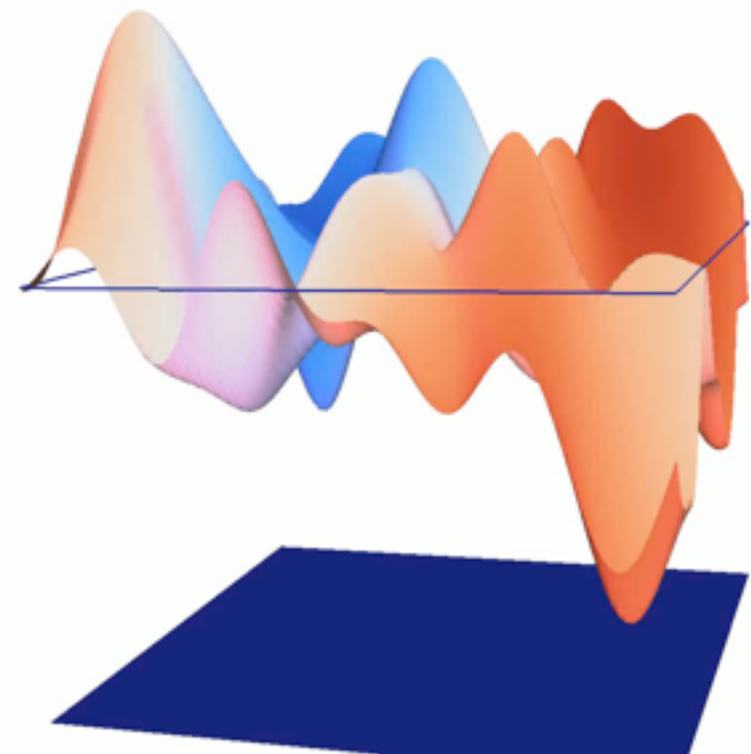
$$A_u \equiv A_u(f, M) \triangleq \{x \in M : f(x) \geq u\}$$

Seuillage à partir d'un champ aléatoire corrélé

Excursion : géométrie obtenue suite au seuillage d'une réalisation.

Principe : garder uniquement les valeurs de la réalisation **supérieures** à une certaine valeur appelée **seuil**.

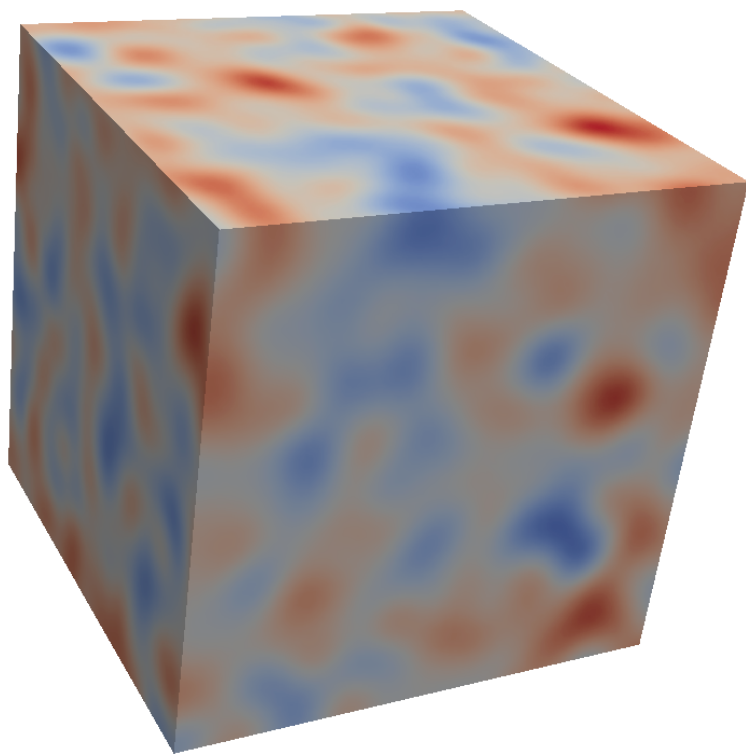
Champ aléatoire 2D



Excursion



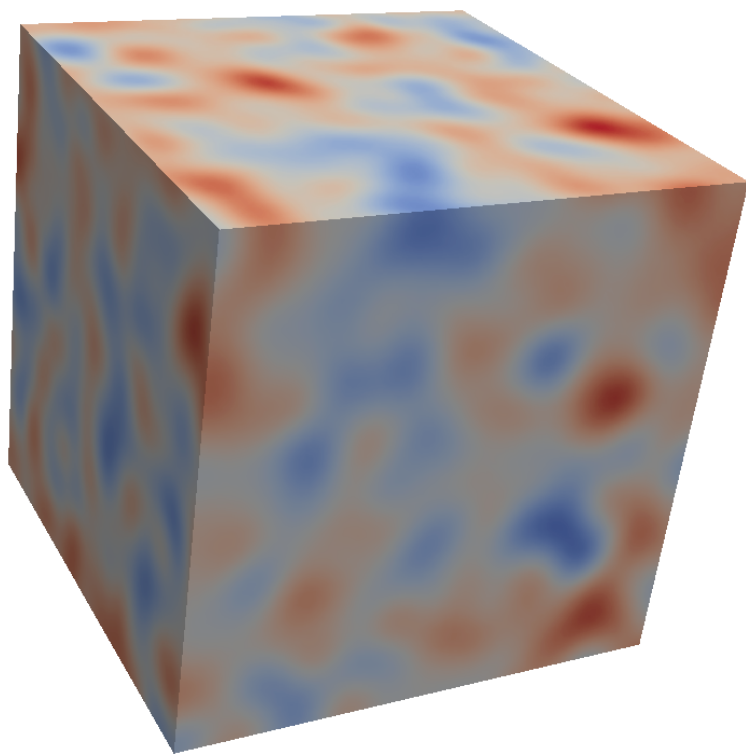
Application à un champ tri-dimensionnel



Champ aléatoire

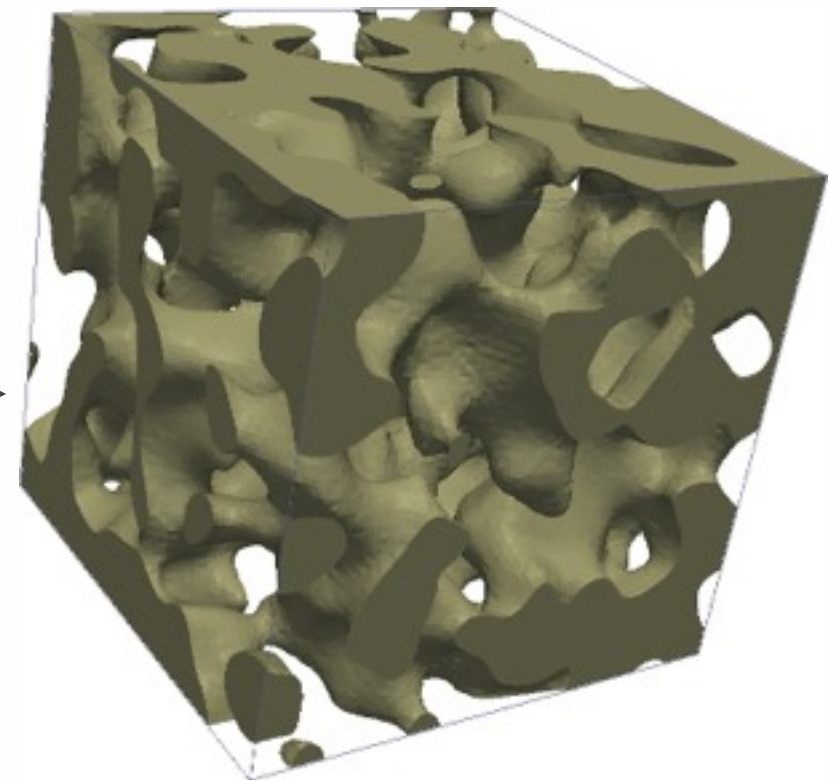


Application à un champ tri-dimensionnel



Champ aléatoire

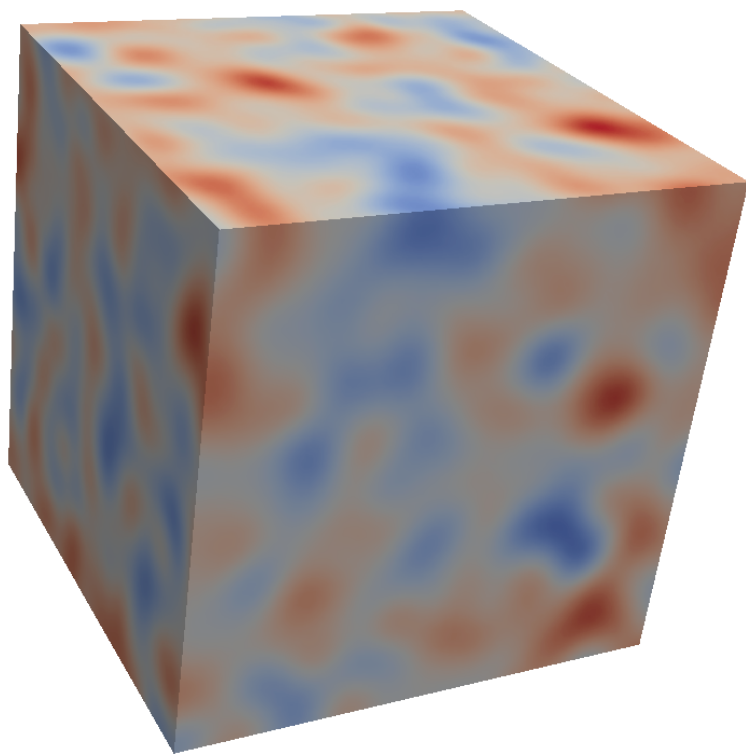
— **Seuillage** —→



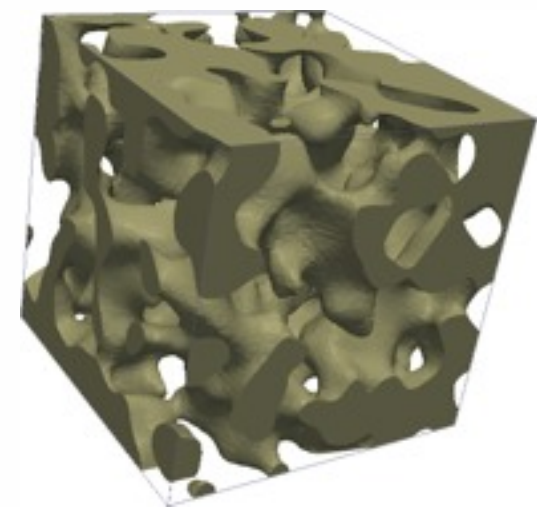
Excursion



Influence du seuil

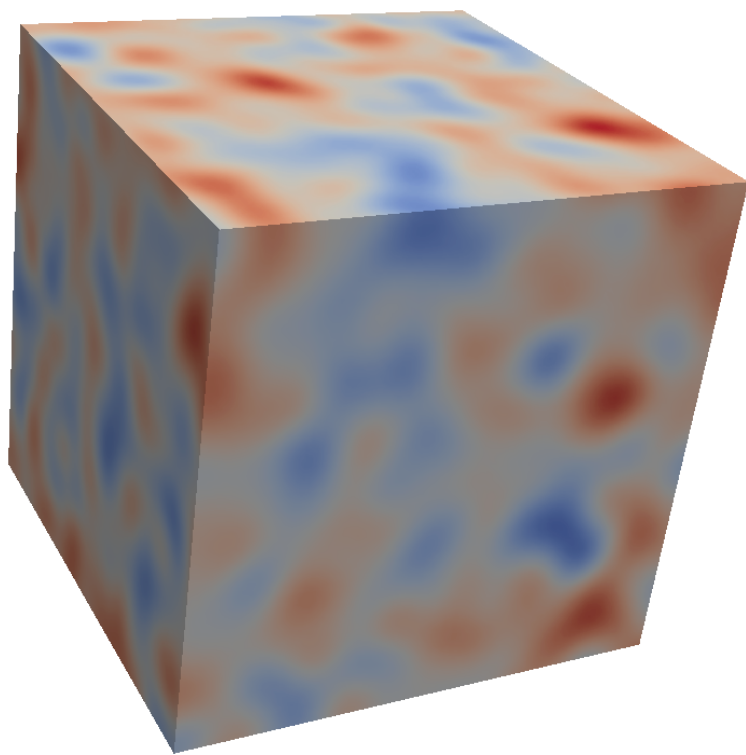


Seuil moyen



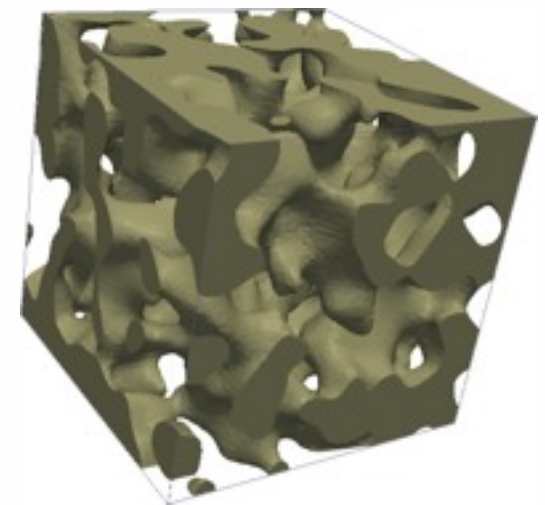
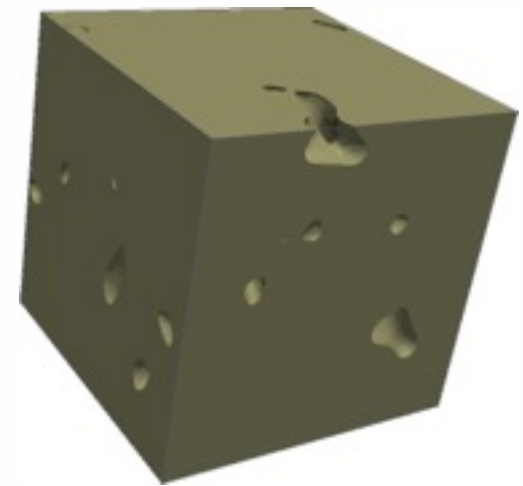


Influence du seuil



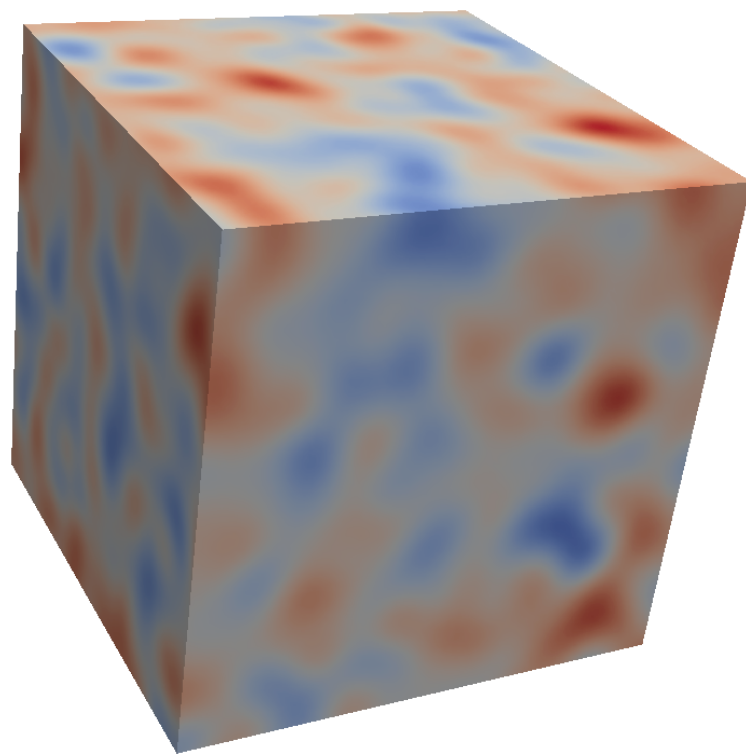
Seuil faible

Seuil moyen





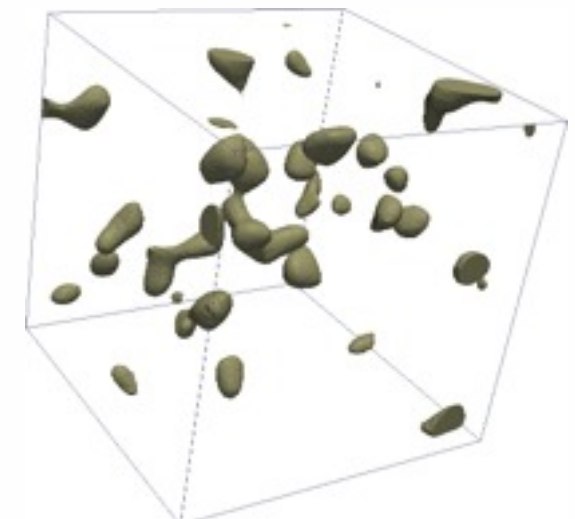
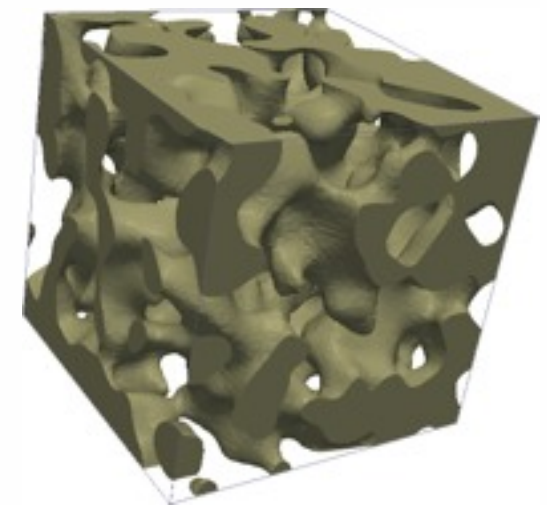
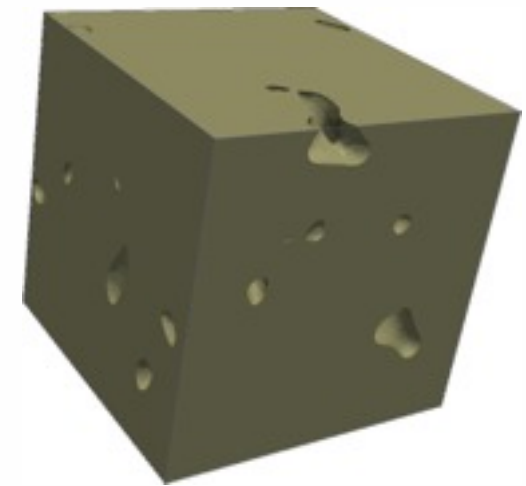
Influence du seuil



Seuil faible

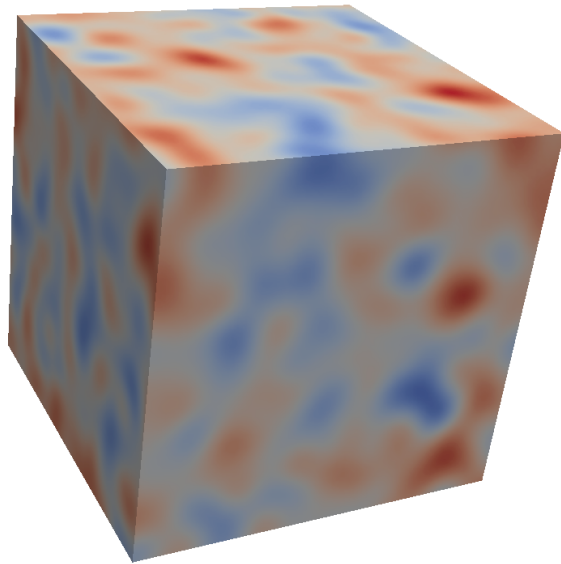
Seuil moyen

Seuil élevé

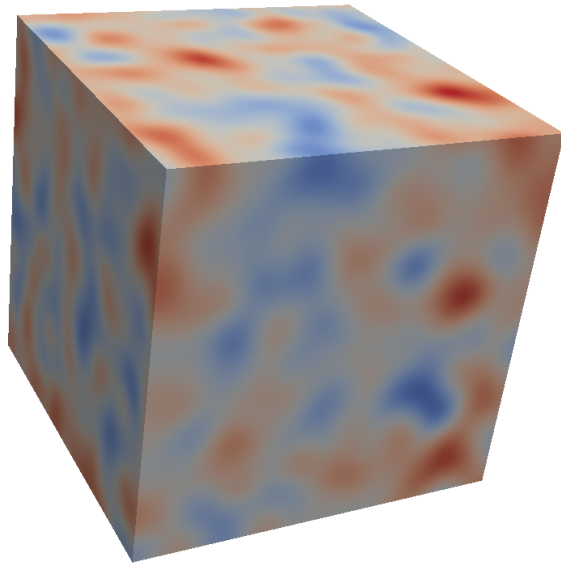




Influence de la longueur de corrélation

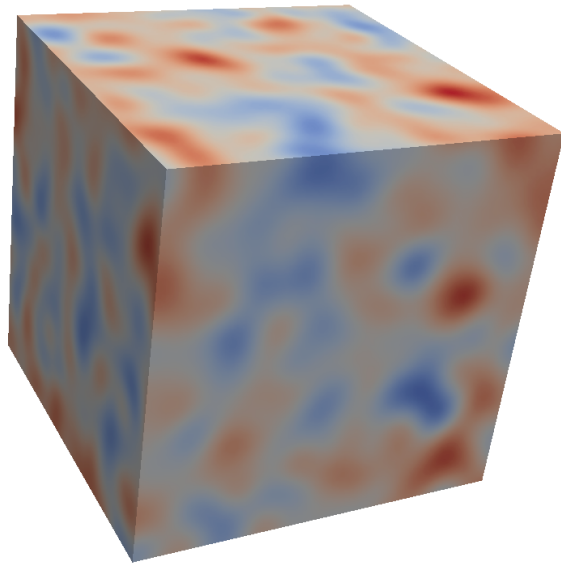


Influence de la longueur de corrélation

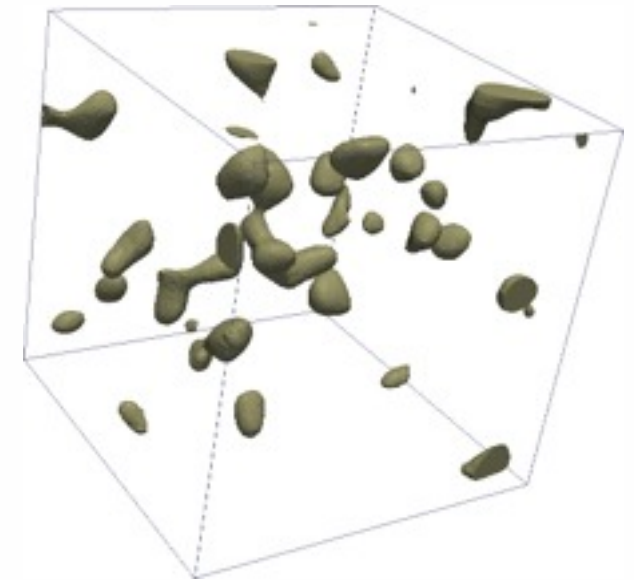


— **Champ fortement corrélé** —→

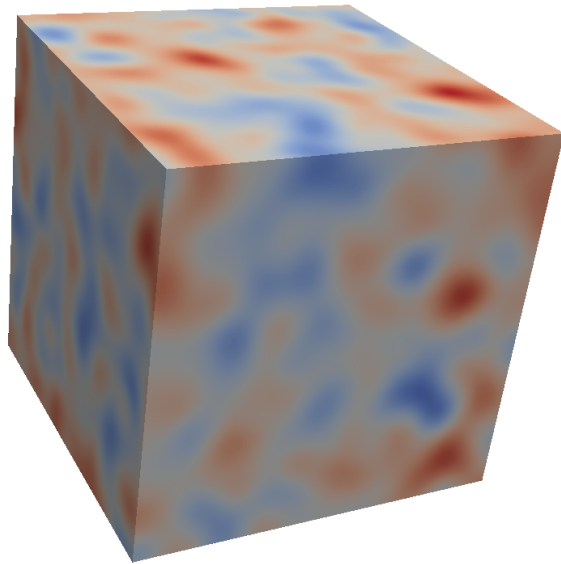
Influence de la longueur de corrélation



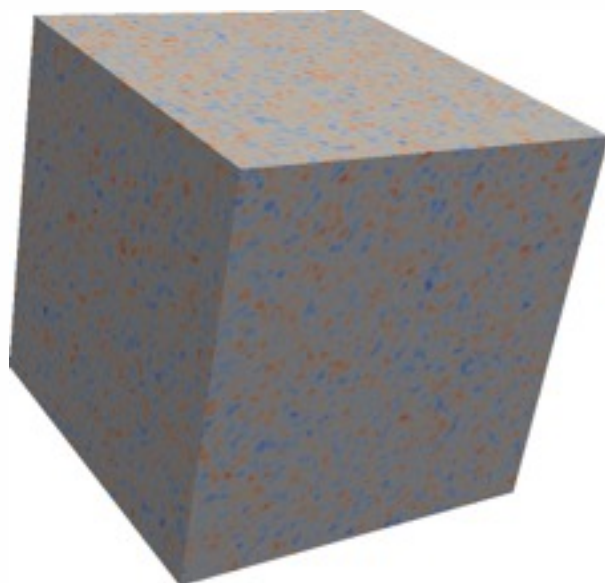
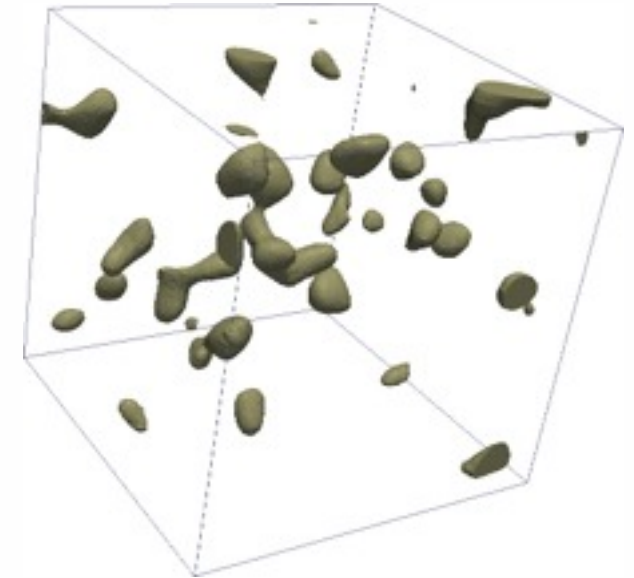
Champ fortement corrélé



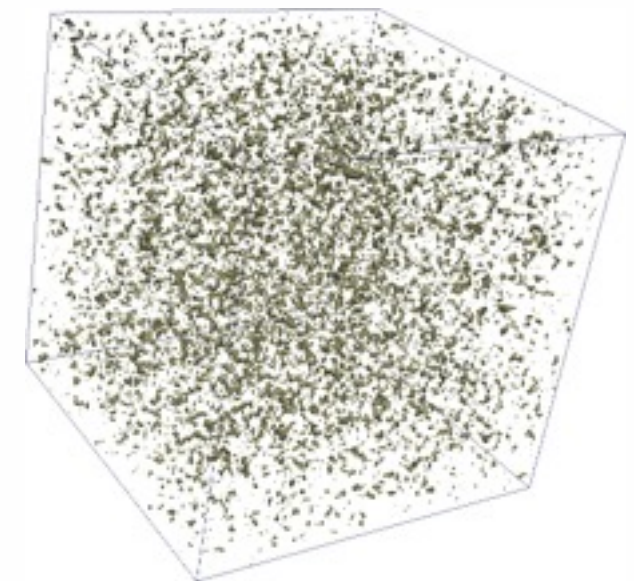
Influence de la longueur de corrélation



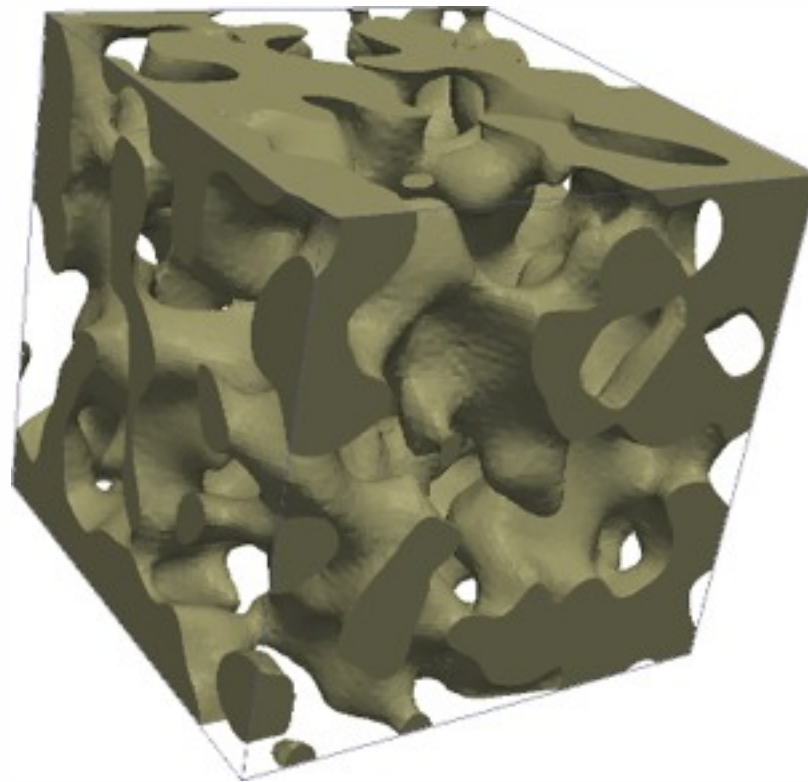
Champ fortement corrélé



Champ faiblement corrélé

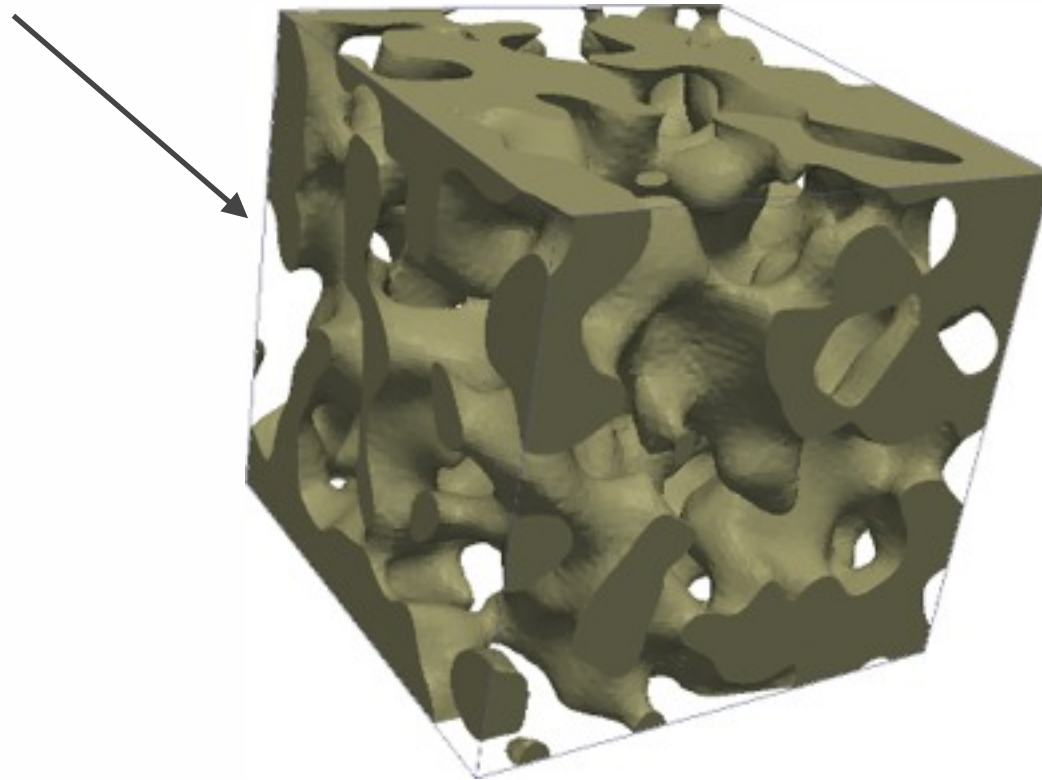


Caractéristiques d'entrée et de sortie

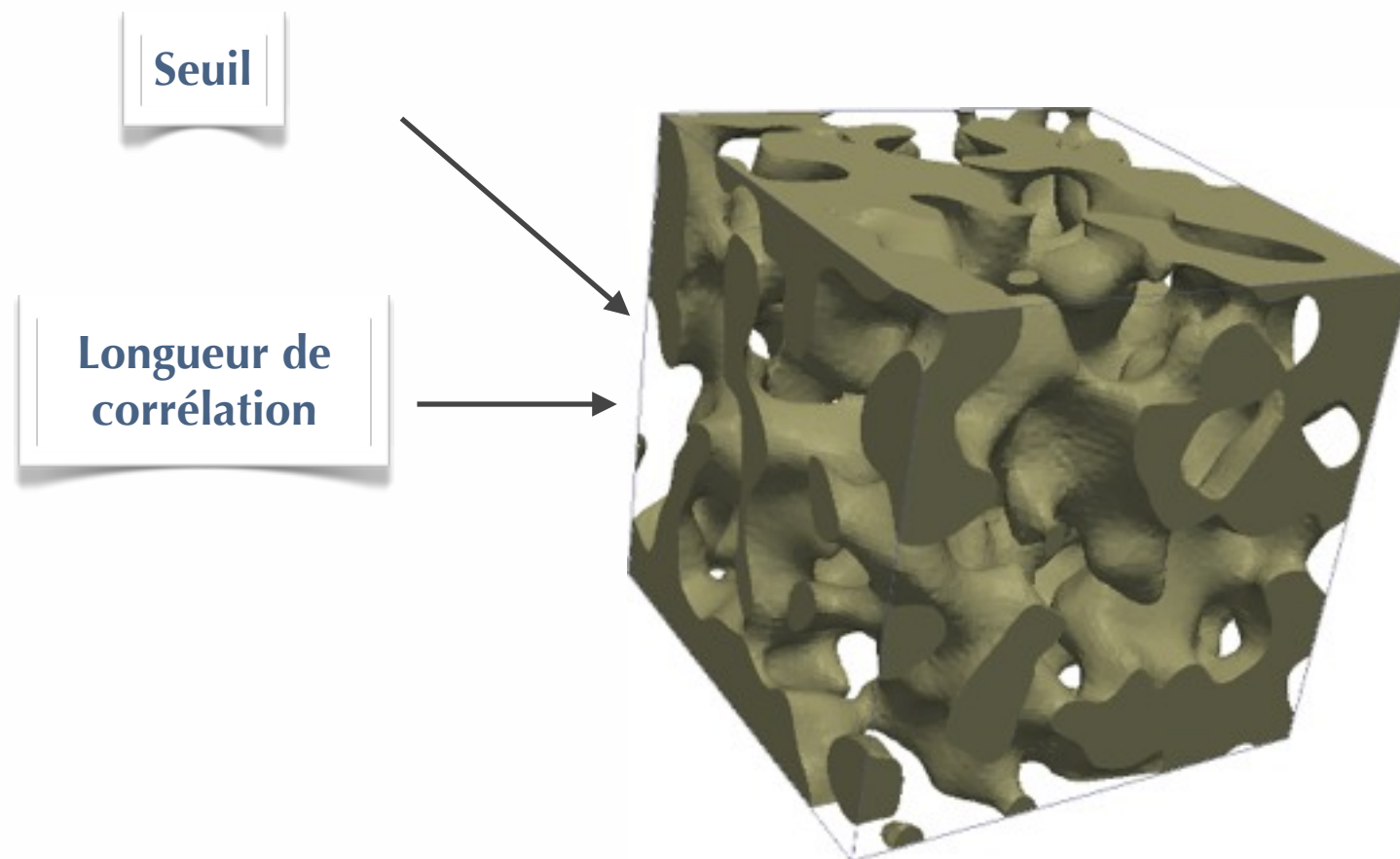


Caractéristiques d'entrée et de sortie

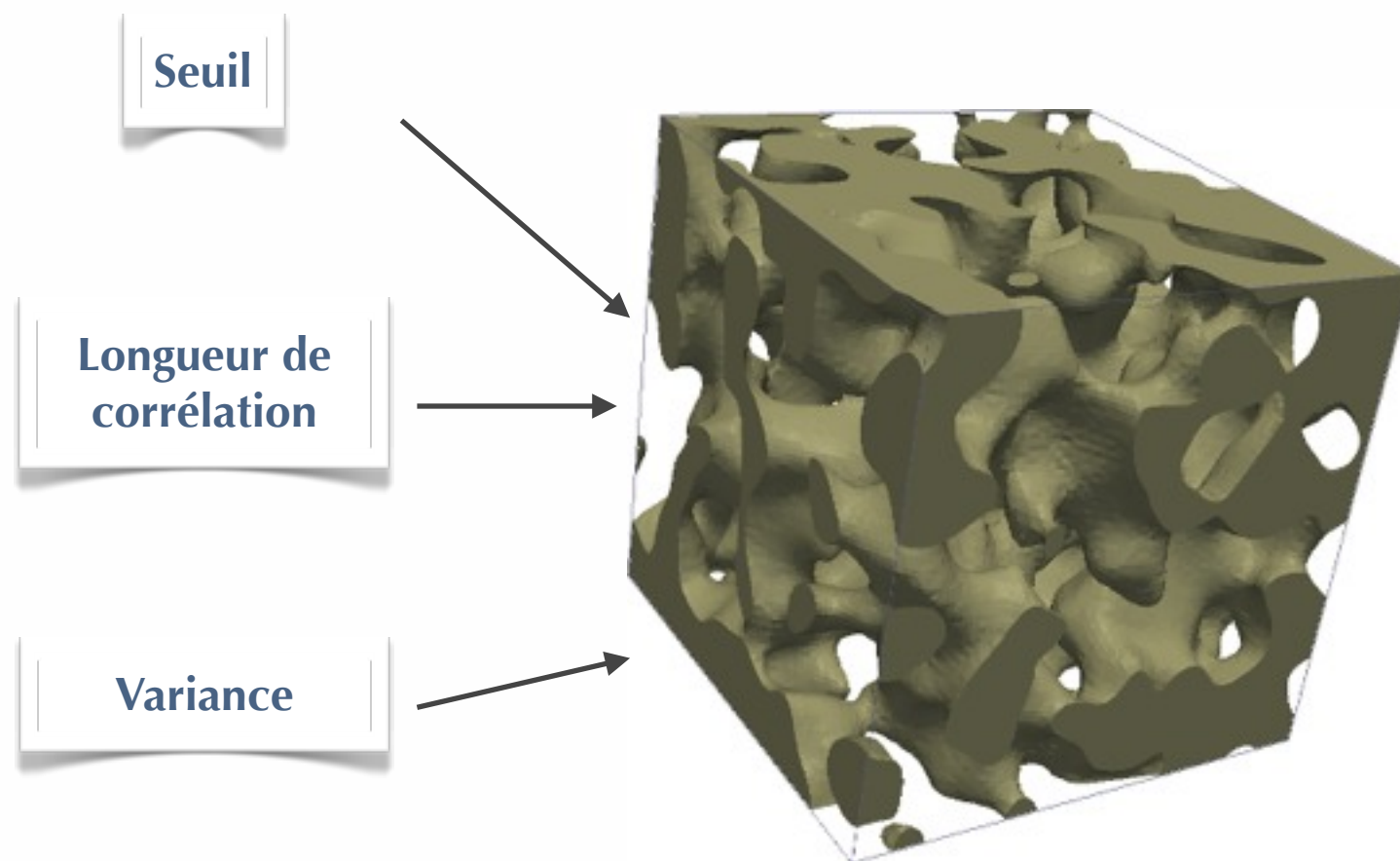
Seuil



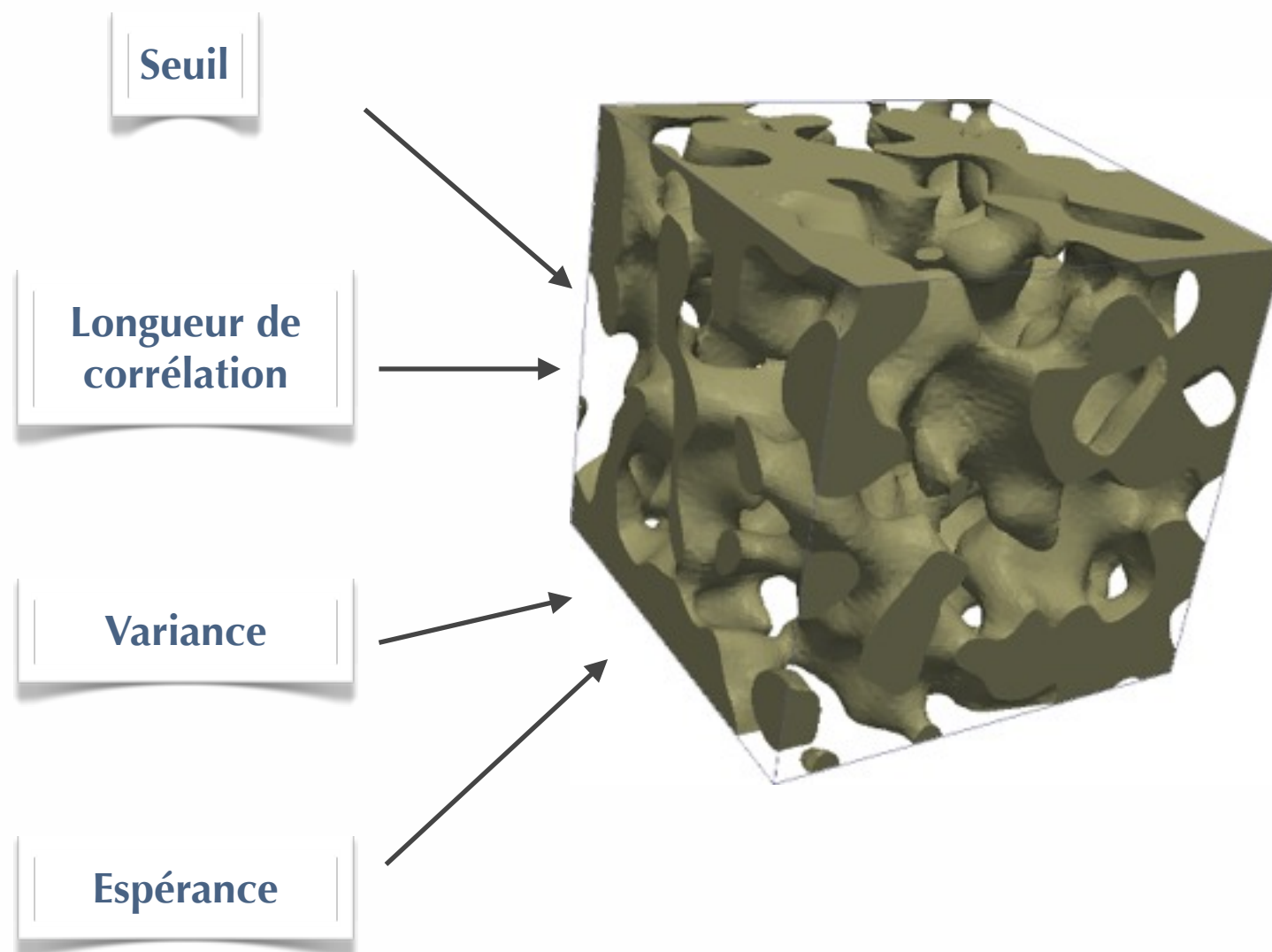
Caractéristiques d'entrée et de sortie



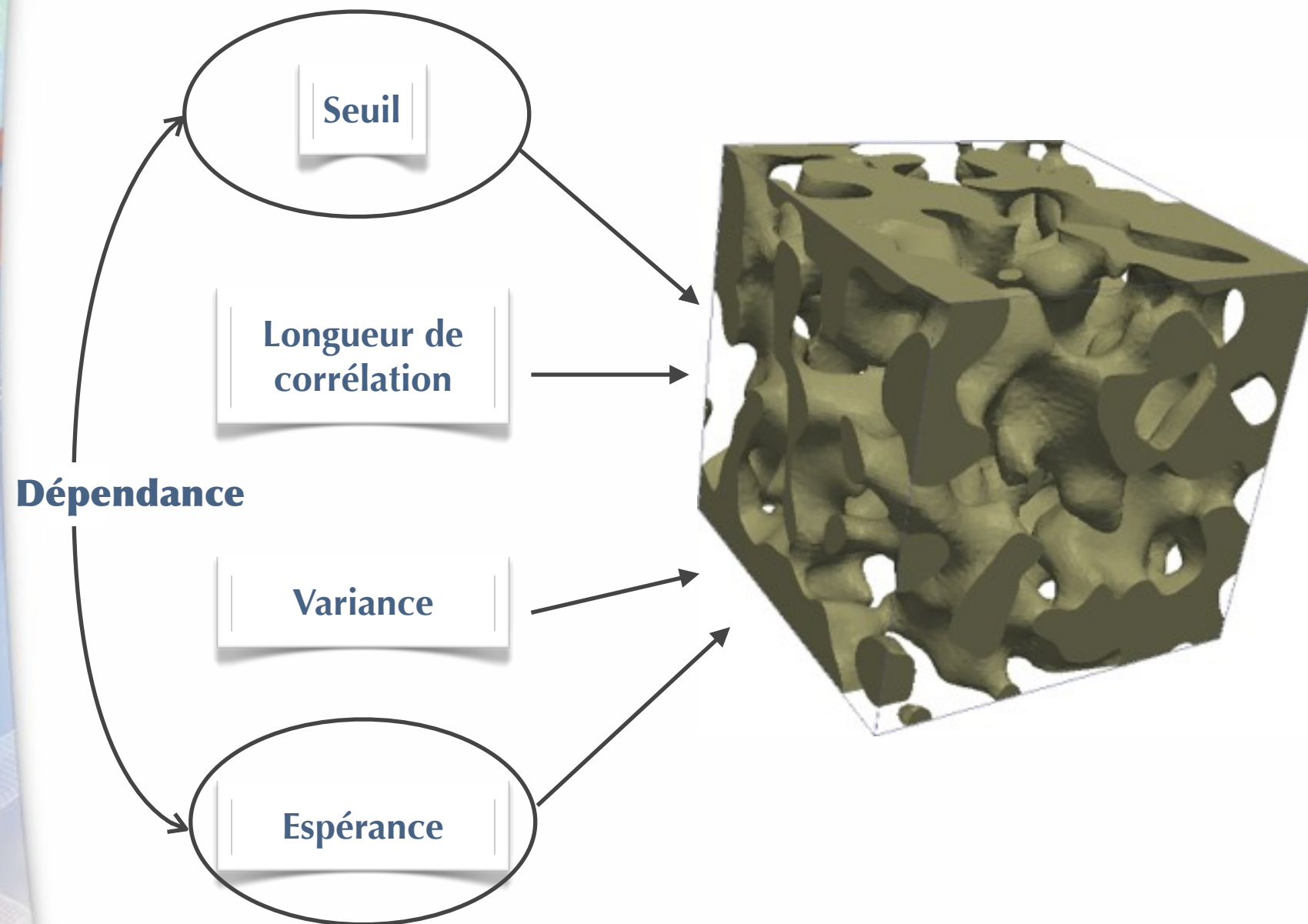
Caractéristiques d'entrée et de sortie



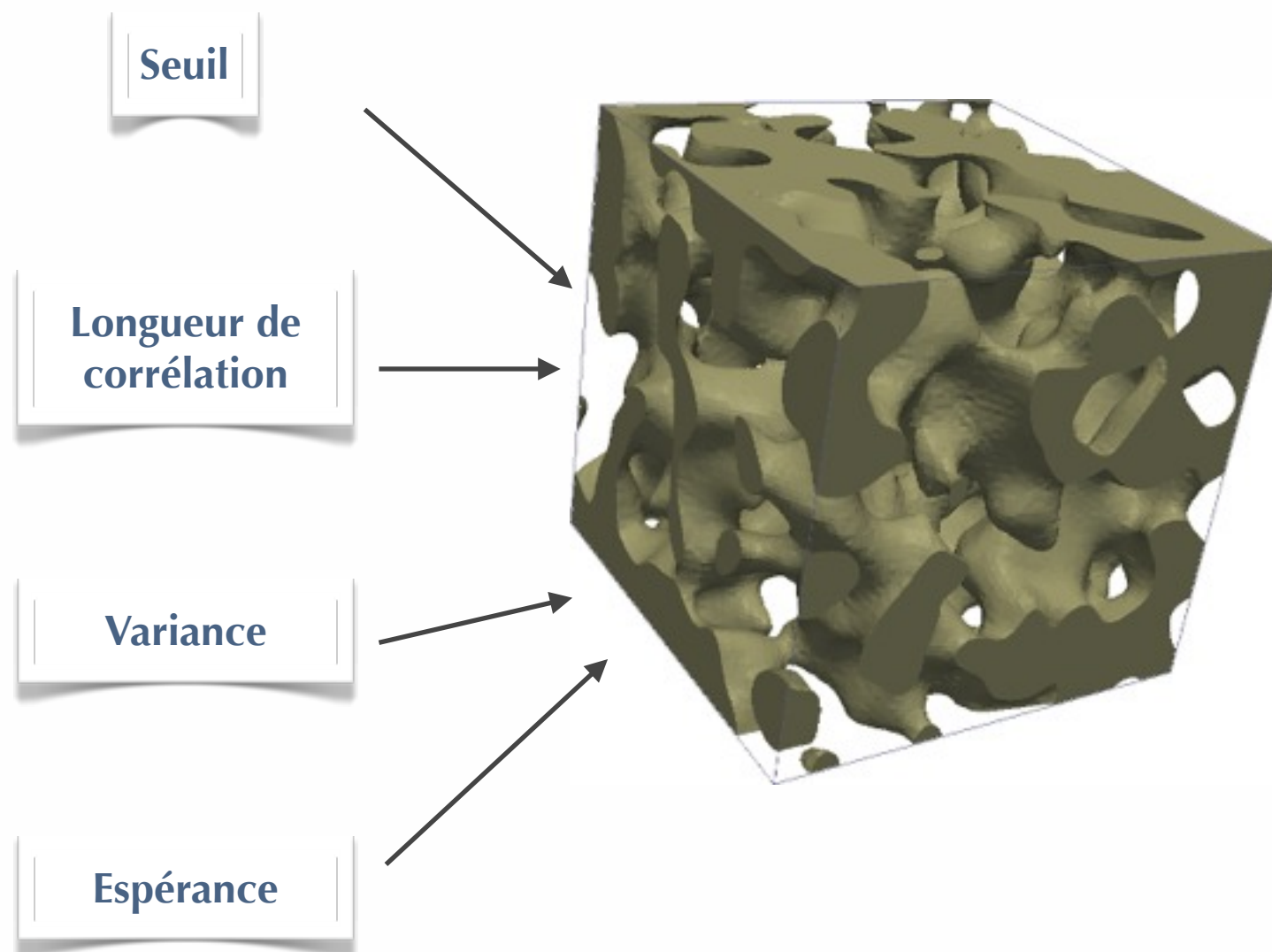
Caractéristiques d'entrée et de sortie



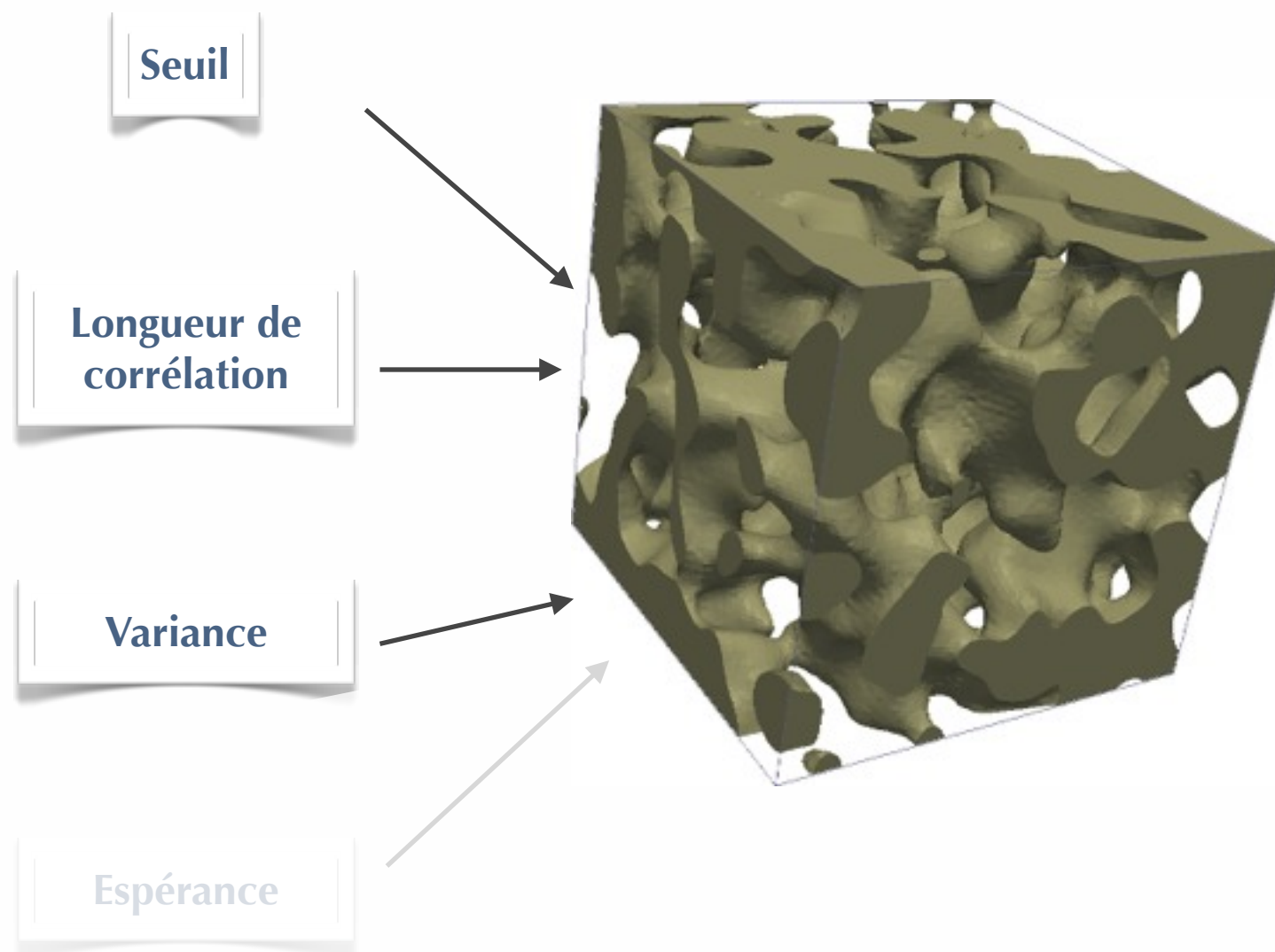
Caractéristiques d'entrée et de sortie



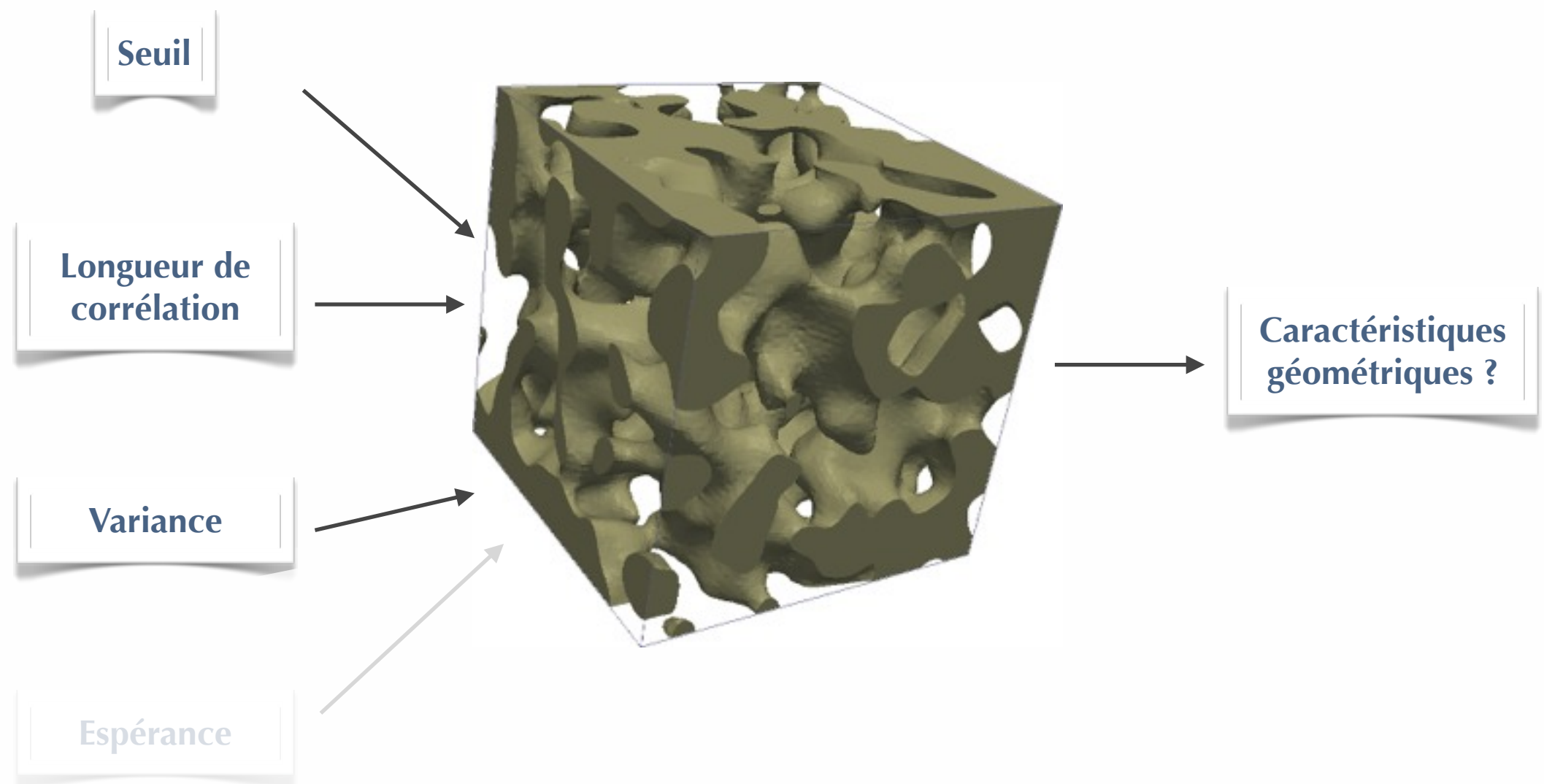
Caractéristiques d'entrée et de sortie



Caractéristiques d'entrée et de sortie



Caractéristiques d'entrée et de sortie





Caractéristiques d'entrée et de sortie

Seuil

Longueur de
corrélation

Variance

Espérance



Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

Longueur de
corrélation

Variance

Espérance





Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélation

Variance

Espérance





Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélation

(2) Surface

Variance

Espérance





Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélation

(2) Surface

Variance

(1) Diamètre moyen

Espérance





Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélacion

(2) Surface

Variance

(1) Diamètre moyen

Espérance

(0) Caractéristique
d'Euler





Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélation

(2) Surface

Variance

(1) Diamètre moyen

Caractéristique d'Euler

(0) Caractéristique
d'Euler



Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélation

(2) Surface

Variance

(1) Diamètre moyen

(0) Caractéristique
d'Euler

Caractéristique d'Euler

$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} \\ - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$



Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélation

(2) Surface

Variance

(1) Diamètre moyen

Caractéristique d'Euler

1

(0) Caractéristique
d'Euler





Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélation

(2) Surface

Variance

(1) Diamètre moyen

Caractéristique d'Euler

0

(0) Caractéristique
d'Euler





Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]

Seuil

(3) Volume

Longueur de
corrélacion

(2) Surface

Variance

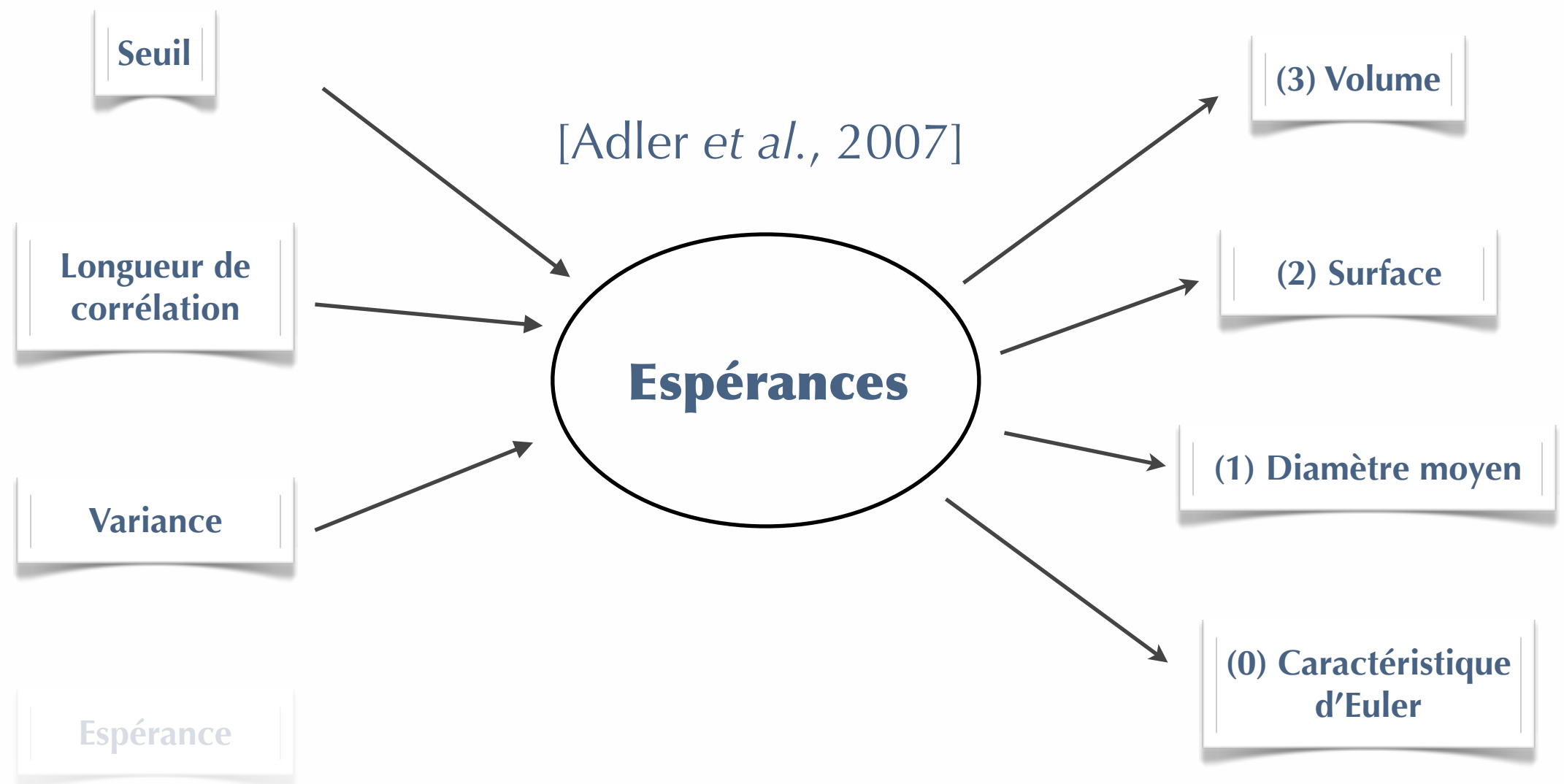
(1) Diamètre moyen

Espérance

(0) Caractéristique
d'Euler

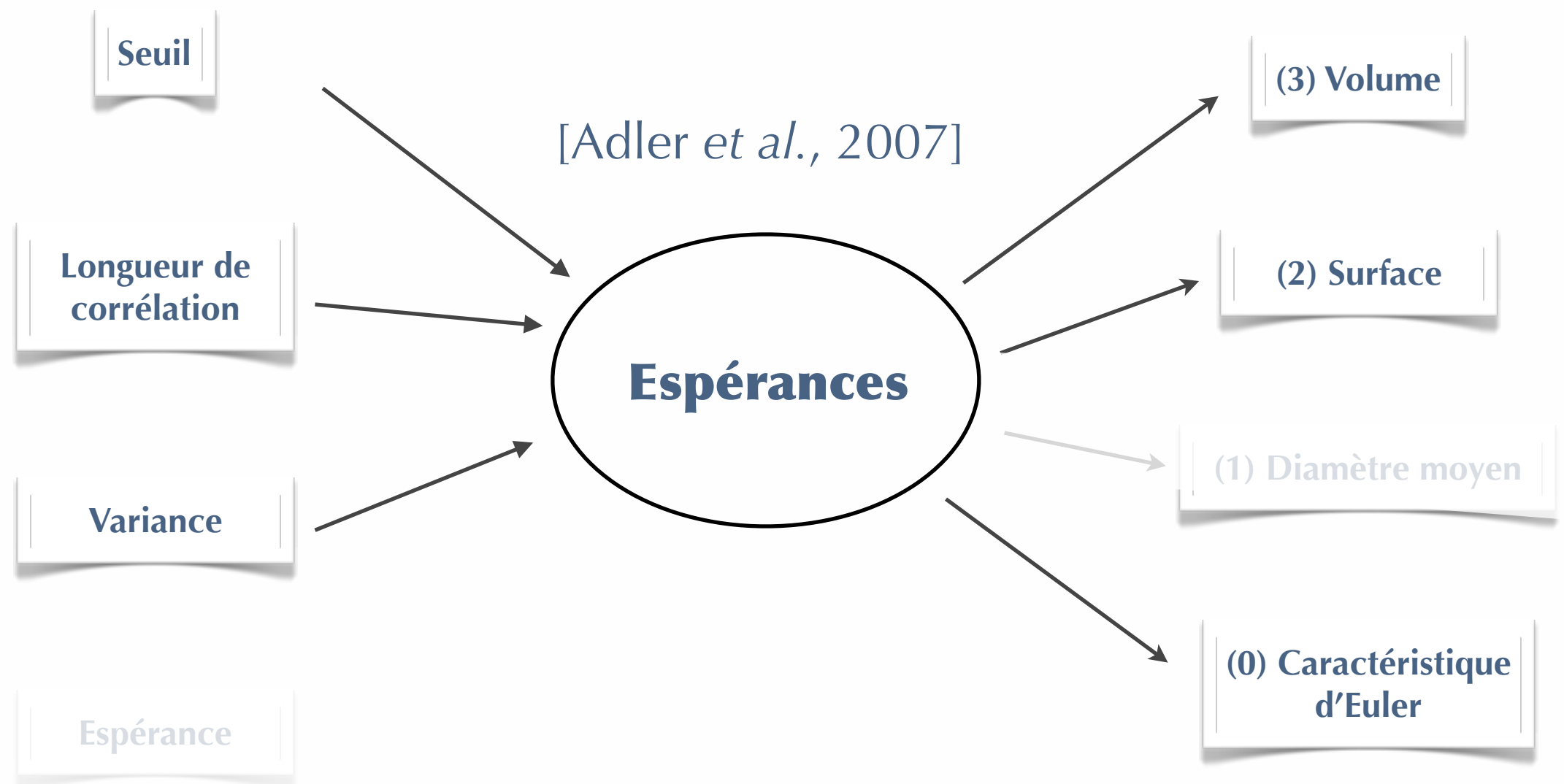
Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]



Caractéristiques d'entrée et de sortie

[Matheron, 1972]





Principe et caractéristiques du modèle

- Principe du seuillage
- Influences des différences paramètres du modèle
- Caractéristiques géométriques et topologiques des excursions



Mise en oeuvre numérique et validation

- Décomposition de Karhunen-Loève
- Calcul des caractéristiques géométriques
- Validation



Conclusions et perspectives

Génération de réalisations

Décomposition de Karhunen-Loève

Principe : Séparation des **variables spatiales** et des **variables stochastiques** des champs aléatoires Gaussiens.

$$f(x, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(w) \psi_n(x)$$

[Karhunen et al., 1947]
[Loève et al., 1978]

Génération de réalisations

Décomposition de Karhunen-Loève

Principe : Séparation des **variables spatiales** et des **variables stochastiques** des champs aléatoires Gaussiens.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\mathbf{w}) \psi_n(\mathbf{x})$$

[Karhunen et al., 1947]
[Loève et al., 1978]

$\lambda_n, \psi_n(\mathbf{x})$

Résolution d'un problème aux valeurs propres

Génération de réalisations

📌 Décomposition de Karhunen-Loève

Principe : Séparation des **variables spatiales** et des **variables stochastiques** des champs aléatoires Gaussiens.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\mathbf{w}) \psi_n(\mathbf{x})$$

[Karhunen et al., 1947]
[Loève et al., 1978]

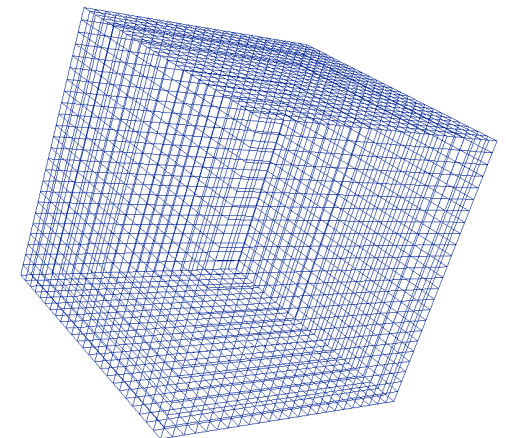
$\lambda_n, \psi_n(\mathbf{x})$

Résolution d'un problème aux valeurs propres

$$\widetilde{M} \widetilde{C} \widetilde{M} \underline{\psi} = \lambda \widetilde{M} \underline{\psi}$$

Longueur de
corrélation

Variance



Génération de réalisations

Décomposition de Karhunen-Loève

Principe : Séparation des **variables spatiales** et des **variables stochastiques** des champs aléatoires Gaussiens.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\mathbf{w}) \psi_n(\mathbf{x})$$

[Karhunen et al., 1947]
[Loève et al., 1978]

$\lambda_n, \psi_n(\mathbf{x})$

Résolution d'un problème aux valeurs propres

$\xi_n(\mathbf{w})$

Variables aléatoires Gaussiennes

Génération de réalisations

📌 Décomposition de Karhunen-Loève

Principe : Séparation des **variables spatiales** et des **variables stochastiques** des champs aléatoires Gaussiens.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\mathbf{w}) \psi_n(\mathbf{x})$$

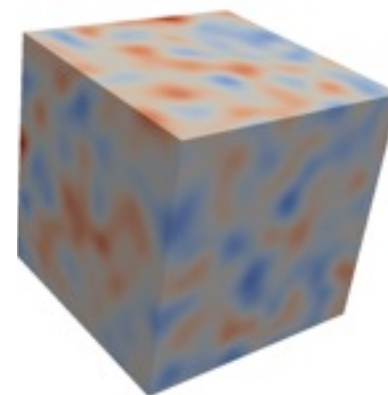
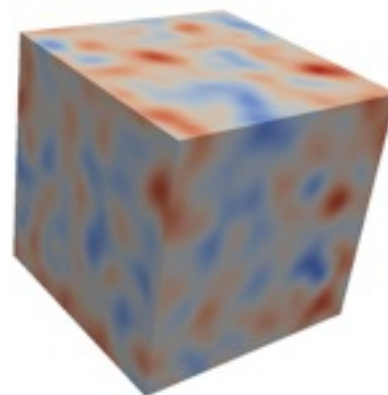
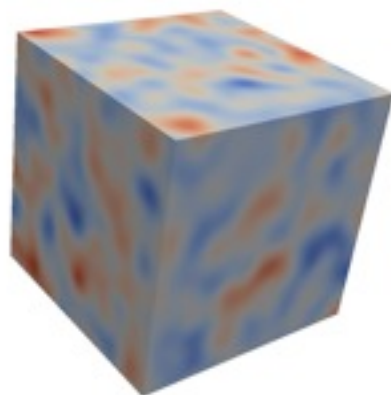
[Karhunen et al., 1947]
[Loève et al., 1978]

$\lambda_n, \psi_n(\mathbf{x})$

Résolution d'un problème aux valeurs propres

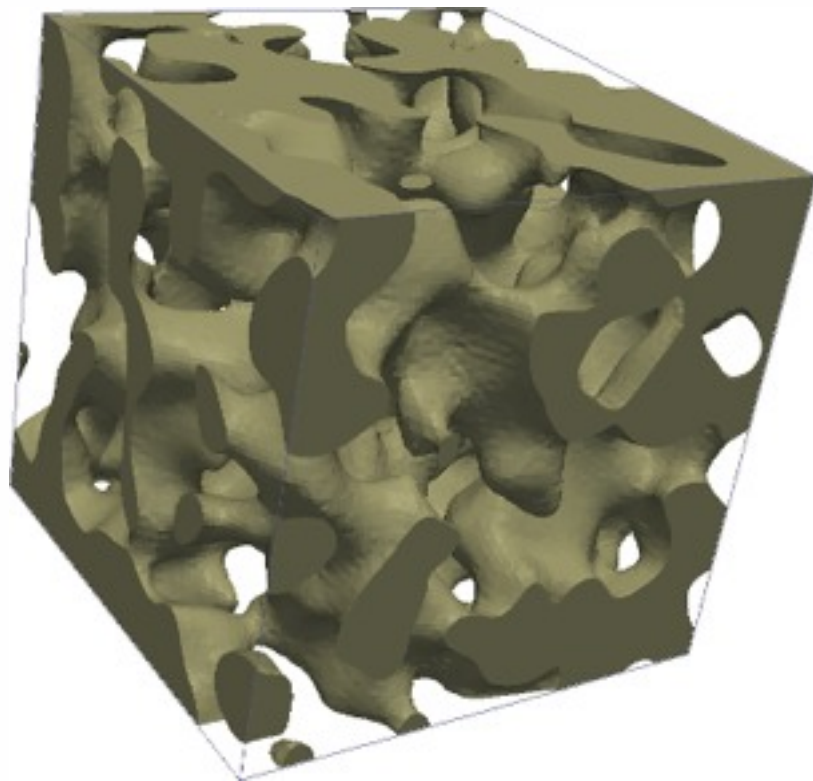
$\xi_n(\mathbf{w})$

Variables aléatoires Gaussiennes



Caractéristiques morphologiques

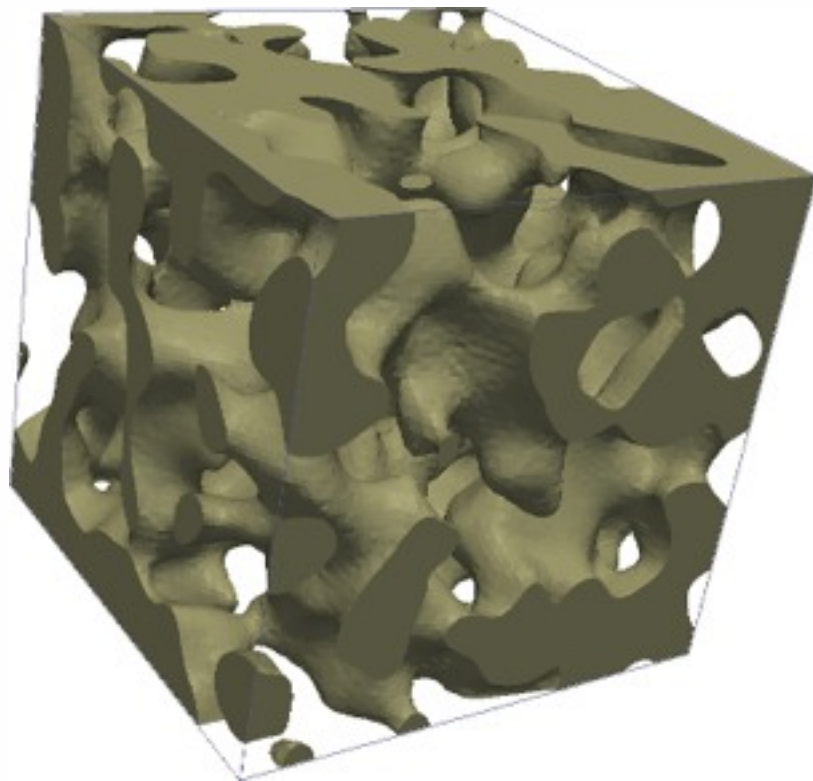
Calcul des caractéristiques géométriques et topologiques



Comment calculer la **surface** et le **volume** d'une excursion ?

Caractéristiques morphologiques

Calcul des caractéristiques géométriques et topologiques



Comment calculer la **surface** et le **volume** d'une excursion ?

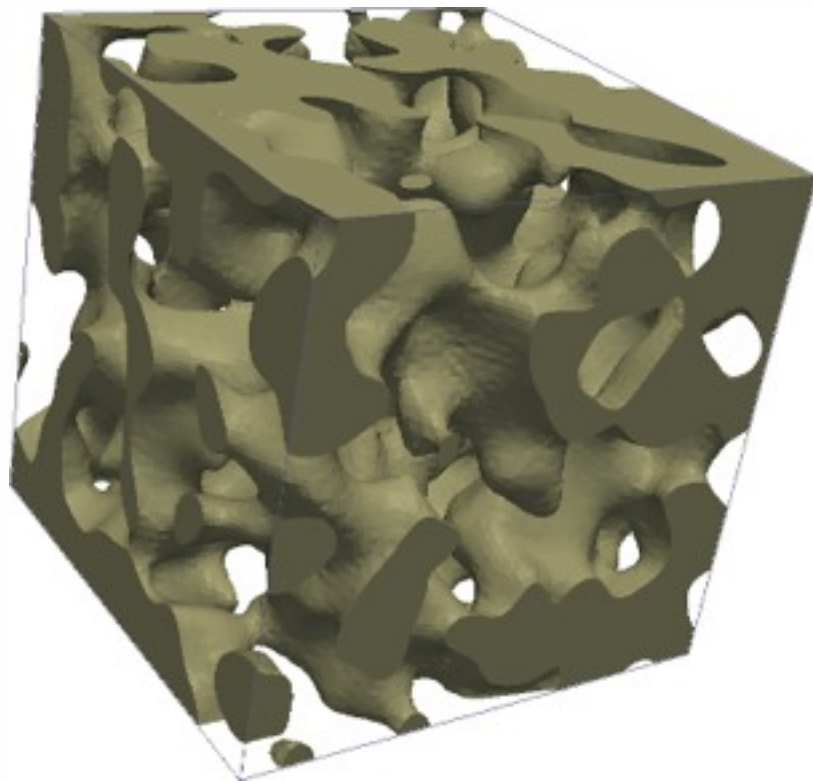
Logiciel de visualisation *Paraview*



Possible car caractéristiques **géométriques** !

Caractéristiques morphologiques

Calcul des caractéristiques géométriques et topologiques



Comment calculer la **surface** et le **volume** d'une excursion ?

Logiciel de visualisation *Paraview*

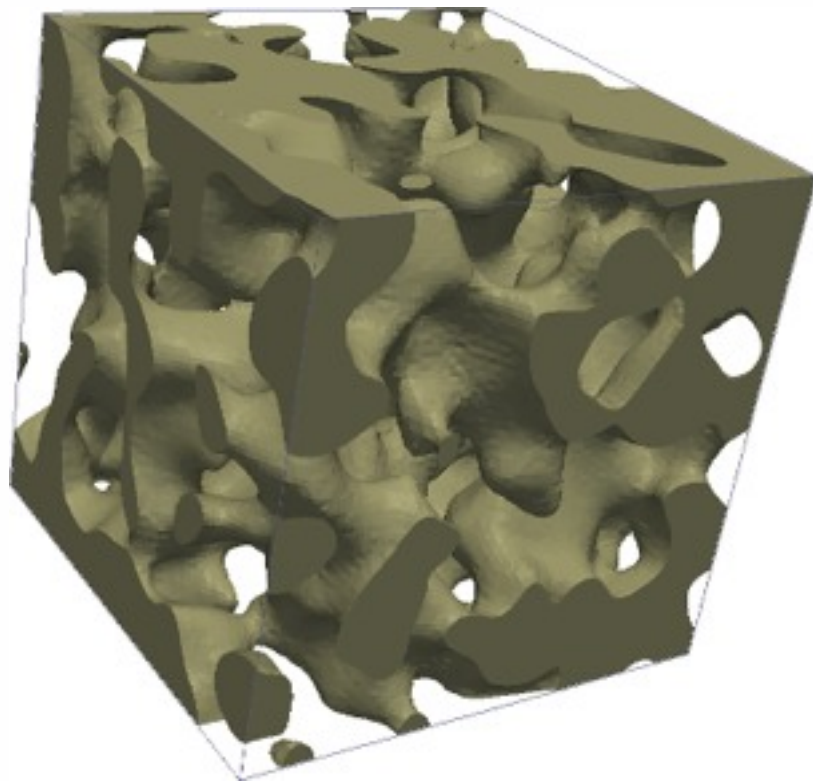


Possible car caractéristiques **géométriques** !

Mais différent pour la **caractéristique d'Euler** qui est **topologique**!

Caractéristiques morphologiques

Calcul des caractéristiques géométriques et topologiques



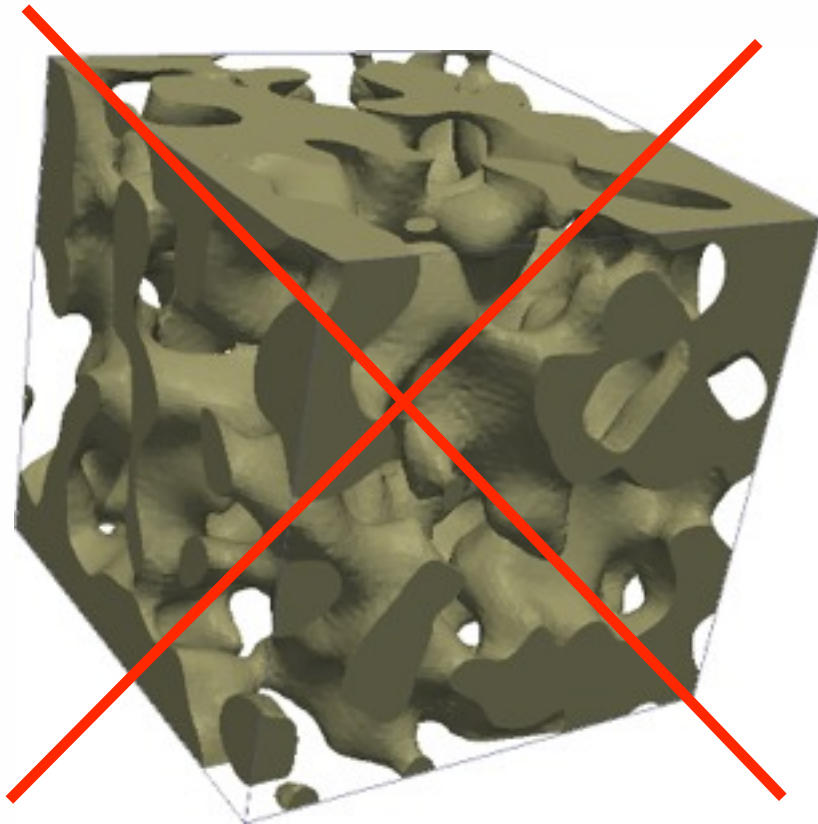
Comment calculer la **caractéristique d'Euler** d'une excursion ?

[Carlsson *et al.*, Plex: Matlab]

$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} \\ - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$

Caractéristiques morphologiques

Calcul des caractéristiques géométriques et topologiques



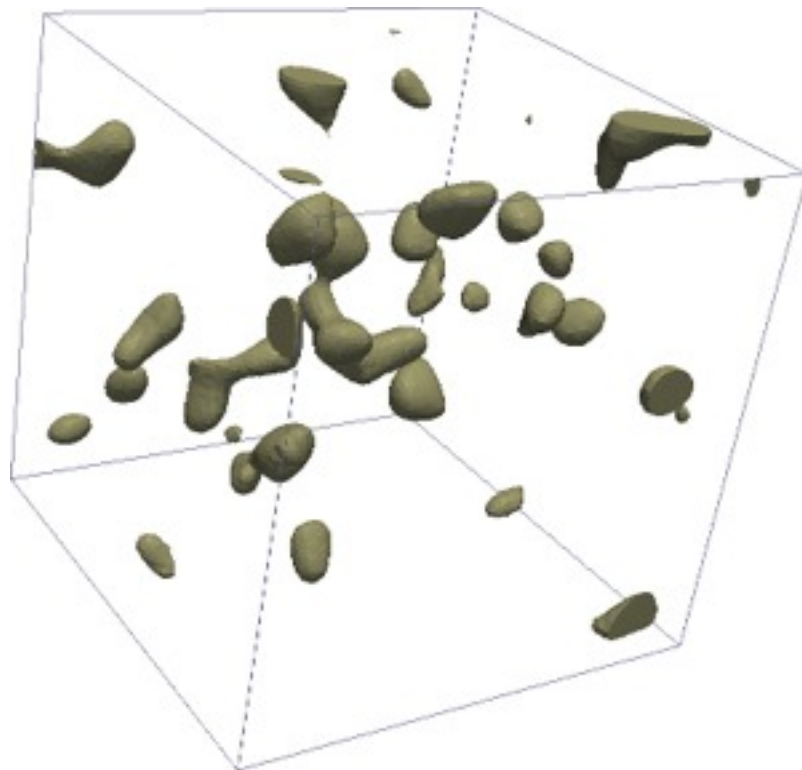
Comment calculer la **caractéristique d'Euler** d'une excursion ?

[Carlsson *et al.*, Plex: Matlab]

$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} \\ - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$

Caractéristiques morphologiques

Calcul des caractéristiques géométriques et topologiques

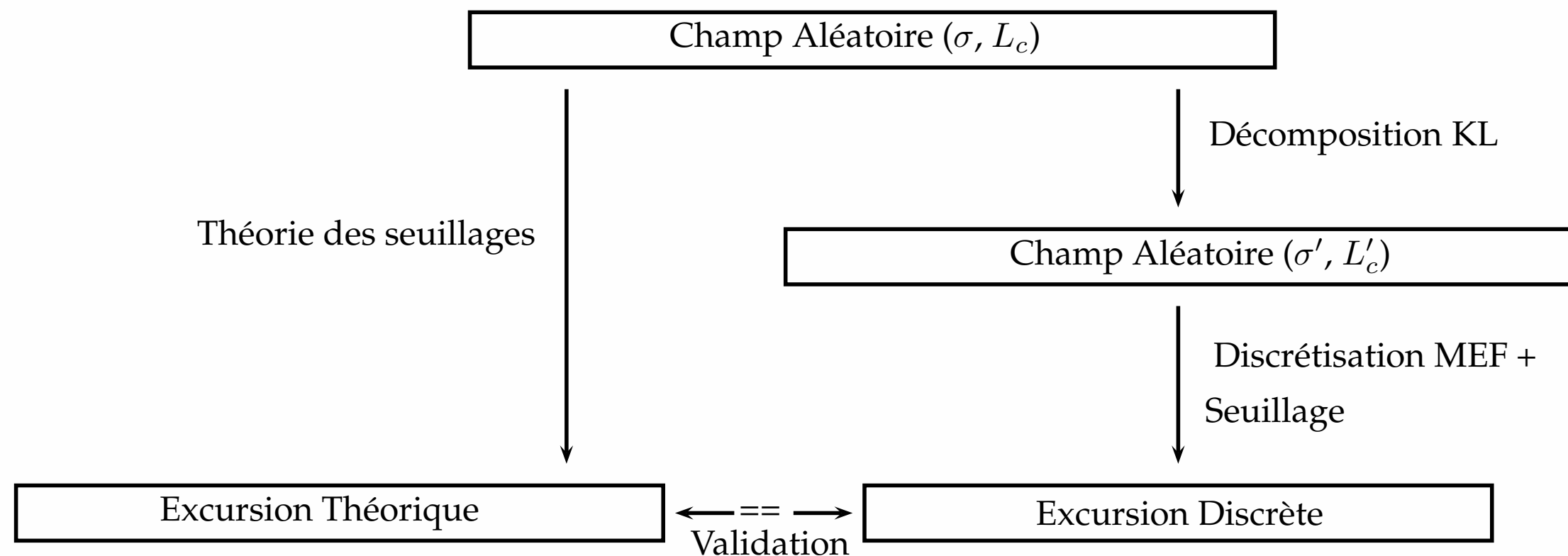


Comment calculer la **caractéristique d'Euler** d'une excursion ?

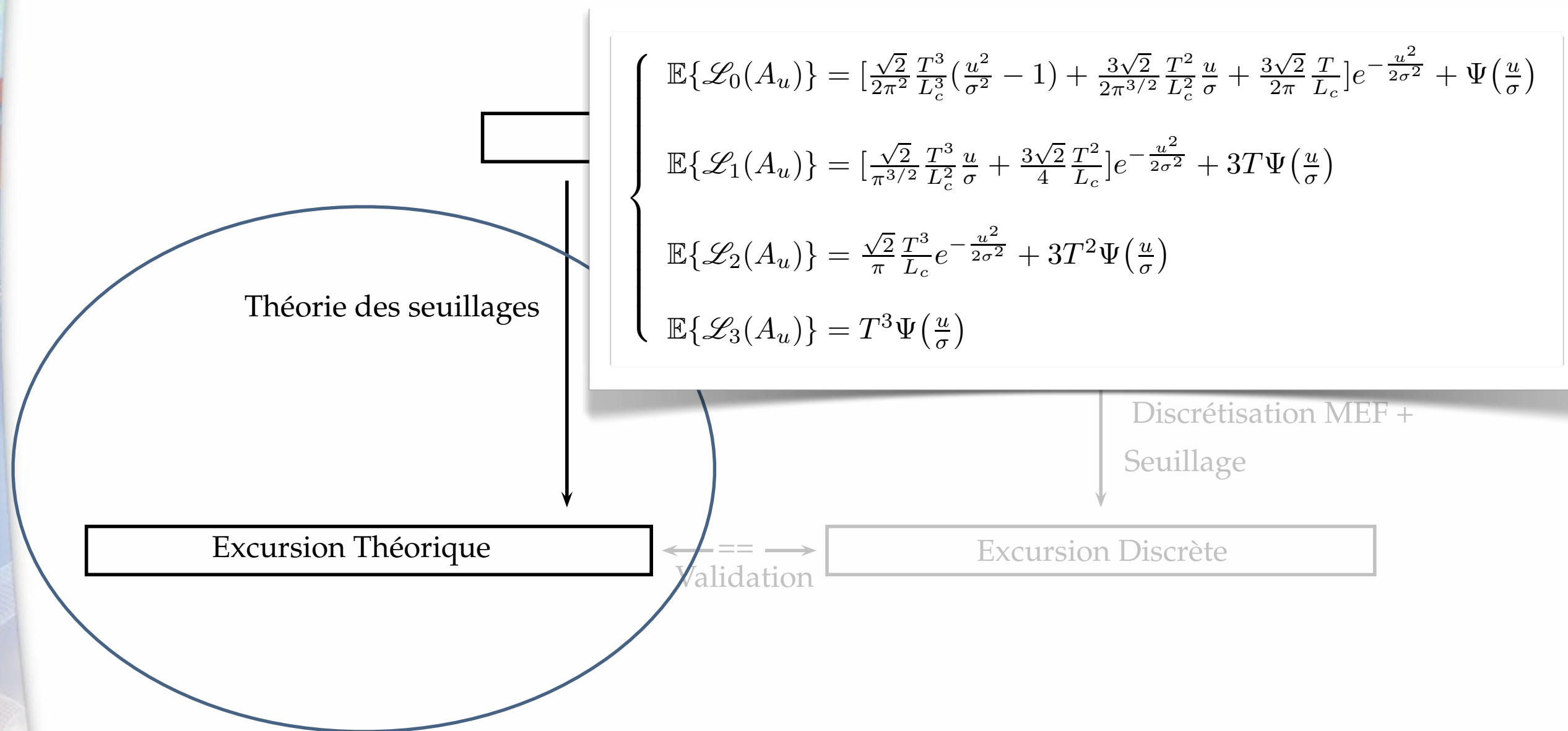
[Carlsson *et al.*, Plex: Matlab]

$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\}$$

Validation du processus de seuillage

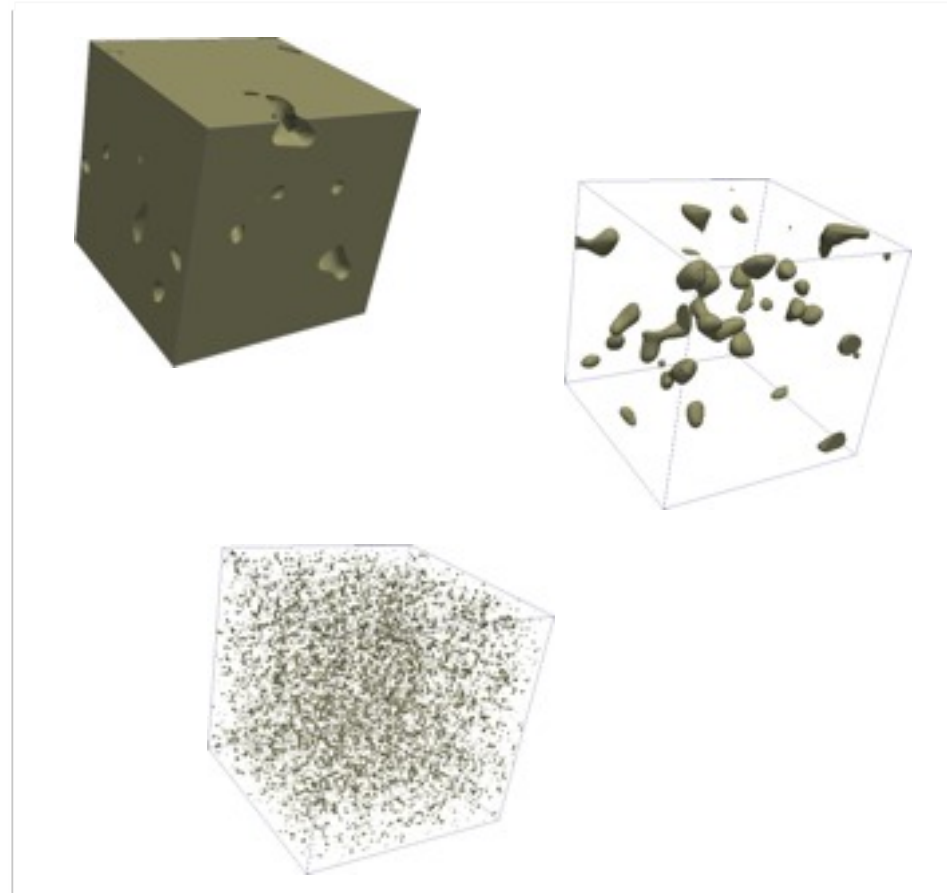


Validation du processus de seuillage





Validation du processus de seuillage



Excursion Théorique

Champ Aléatoire (σ, L_c)

Décomposition KL

Champ Aléatoire (σ', L'_c)

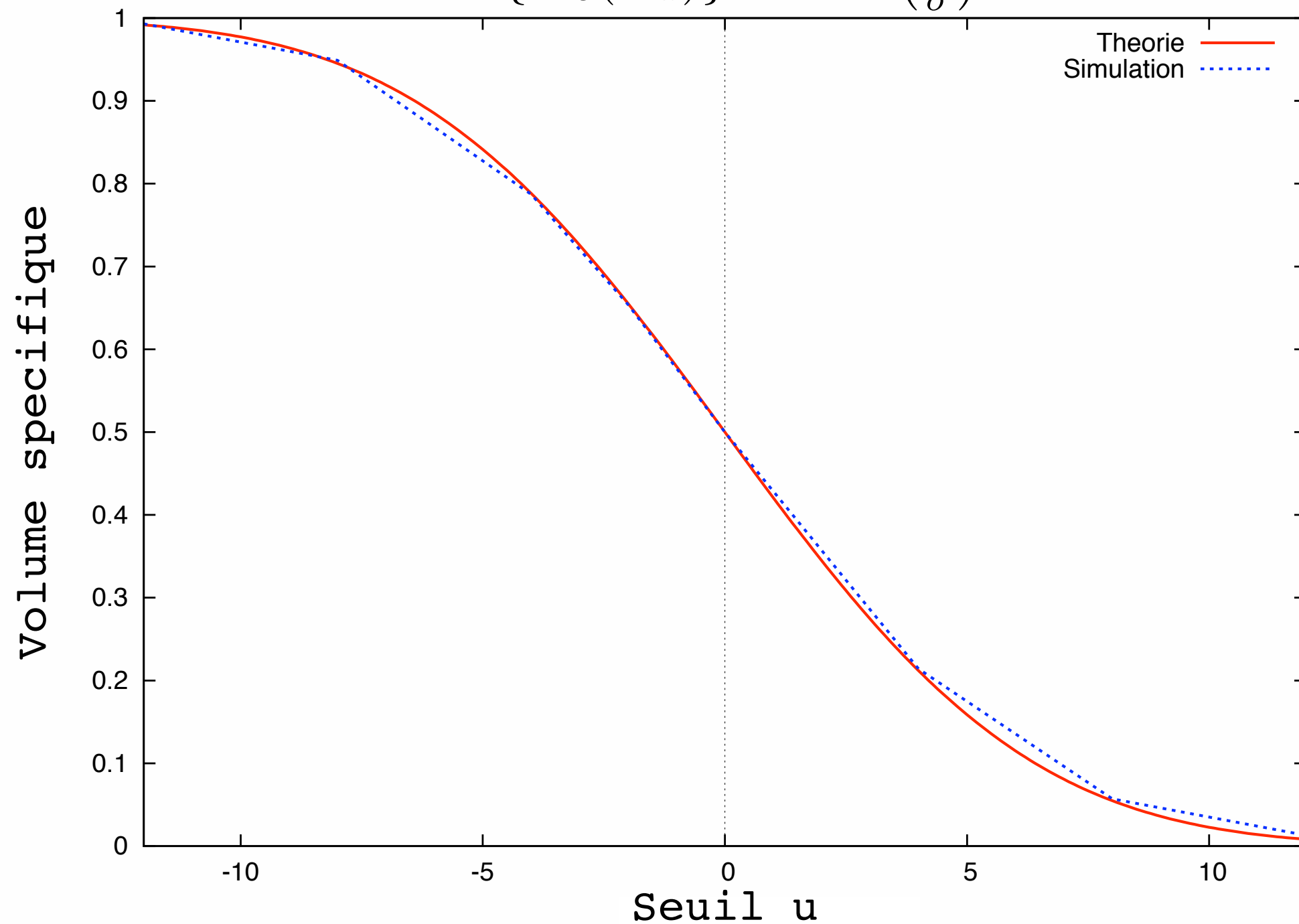
Discretisation MEF +
Seuillage

Excursion Discrète

Validation

Validation du volume spécifique

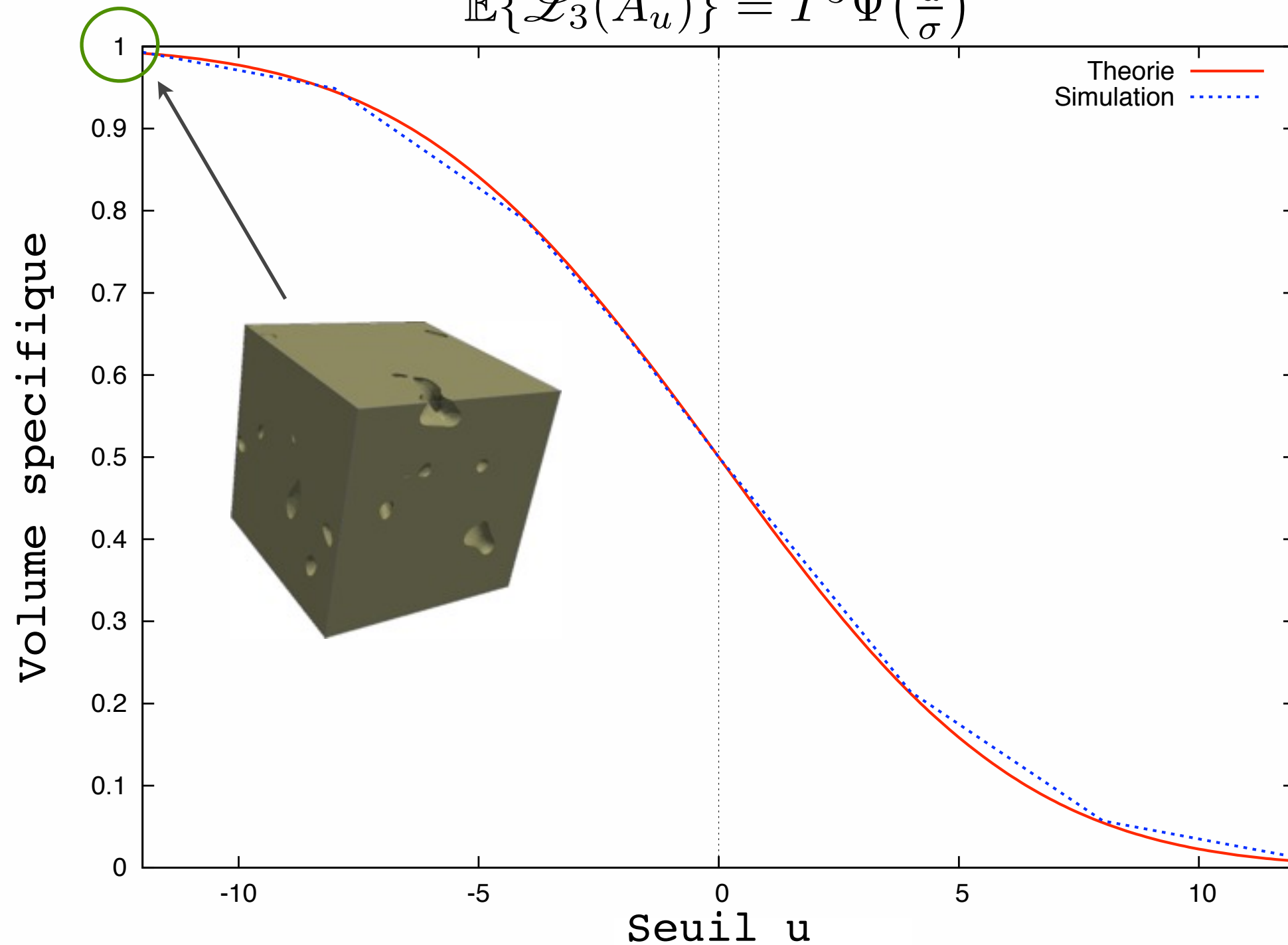
$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_3(A_u)\} = T^3 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$





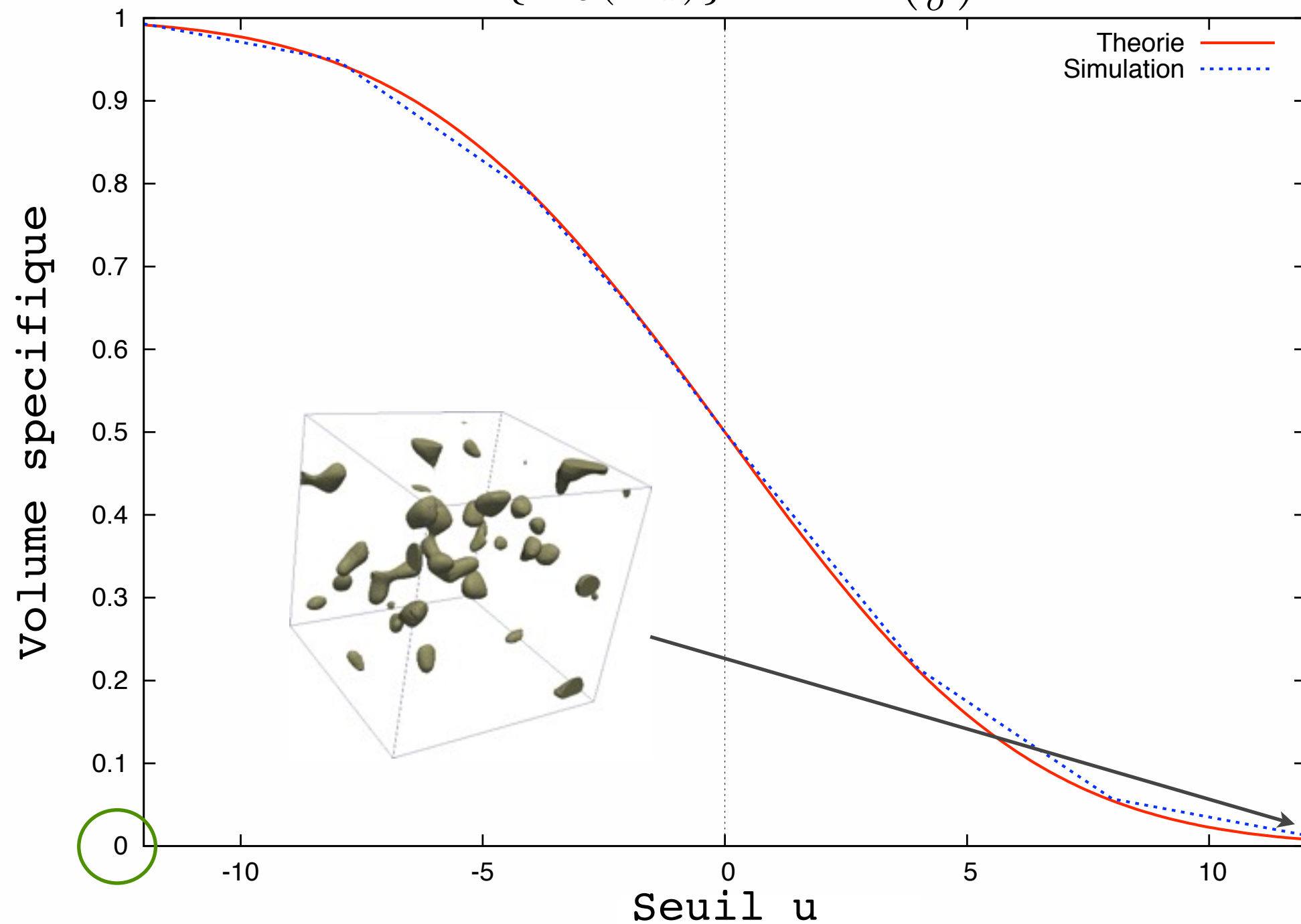
Validation du volume spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_3(A_u)\} = T^3 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$



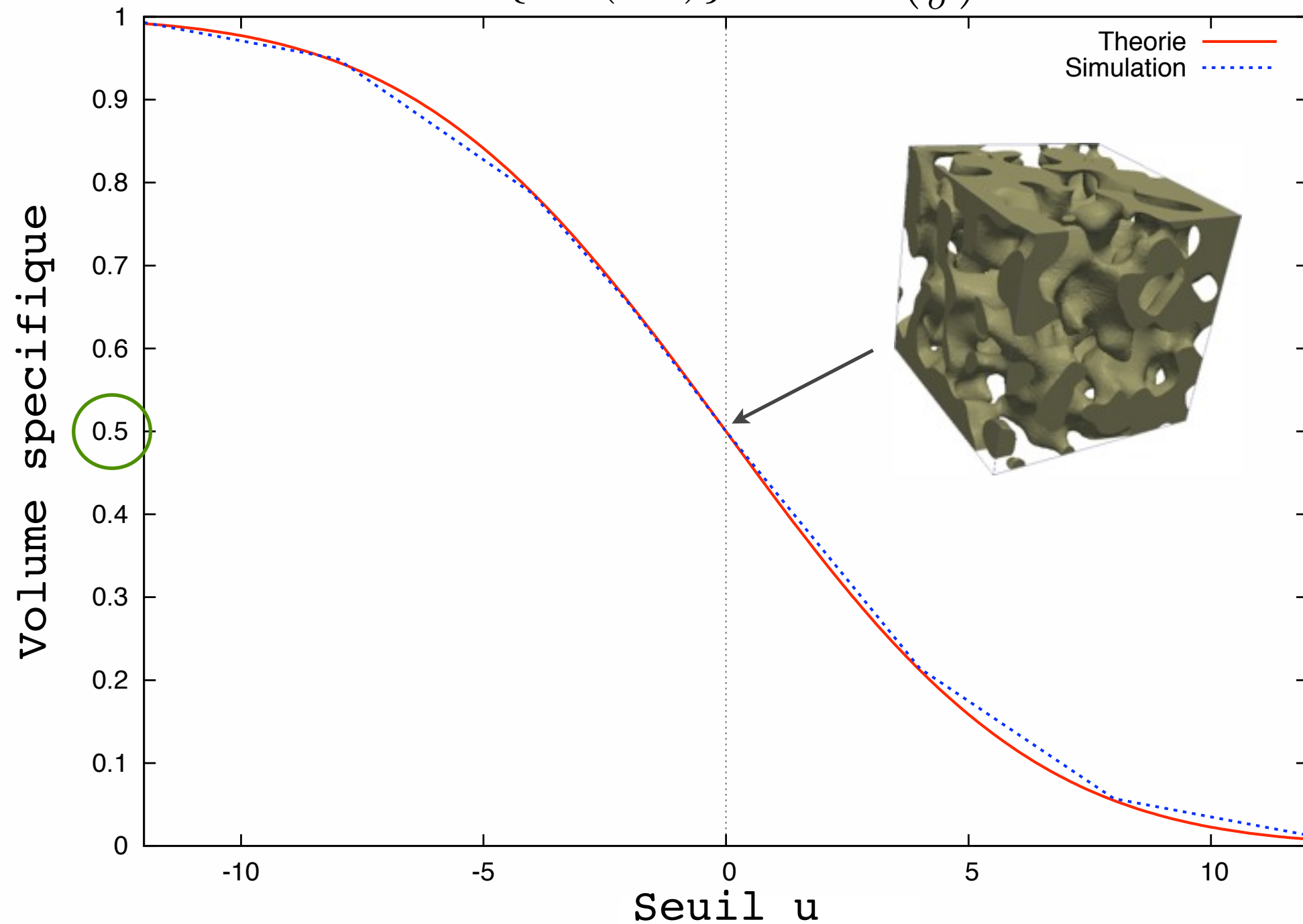
Validation du volume spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_3(A_u)\} = T^3 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$



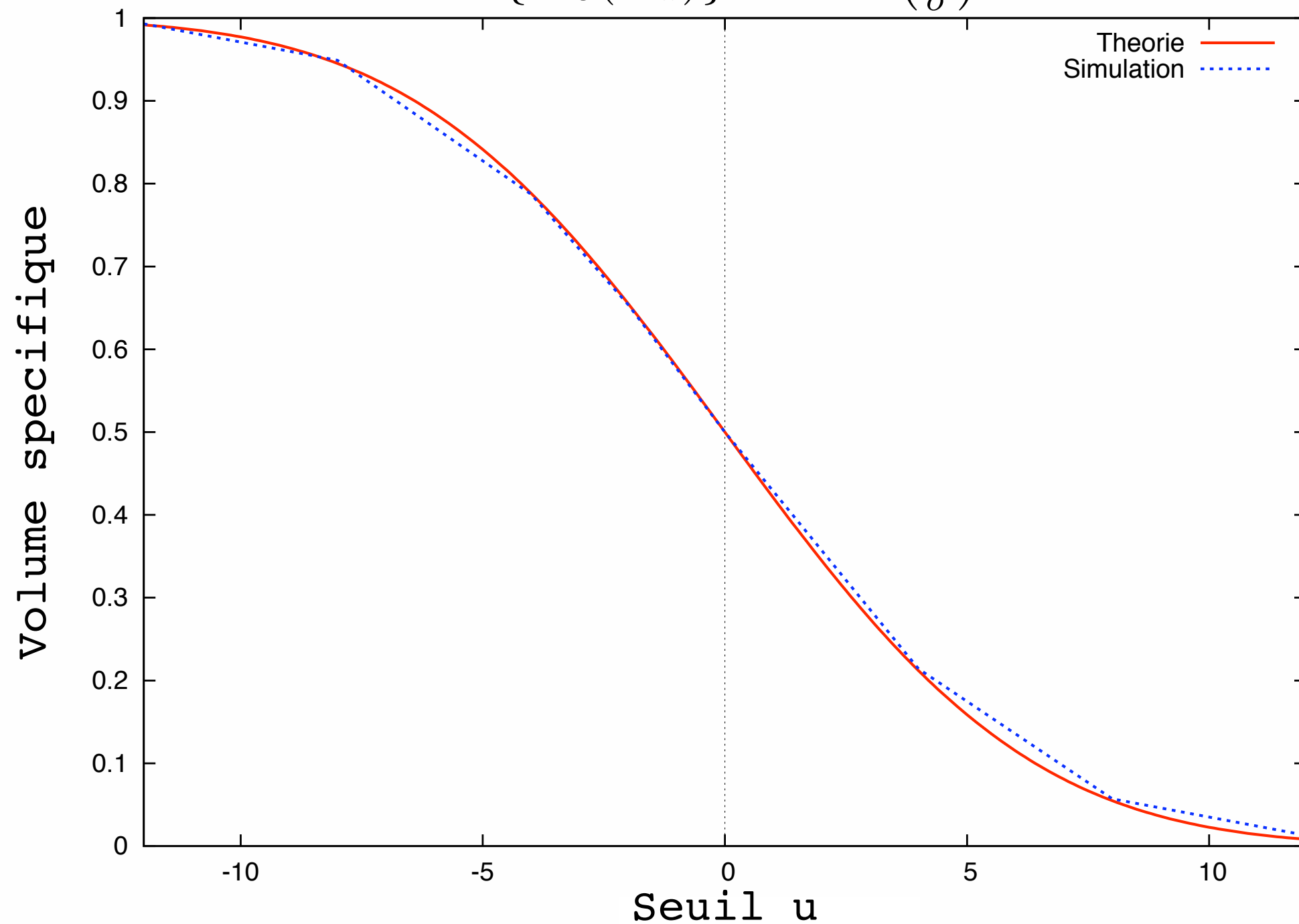
Validation du volume spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_3(A_u)\} = T^3 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$



Validation du volume spécifique

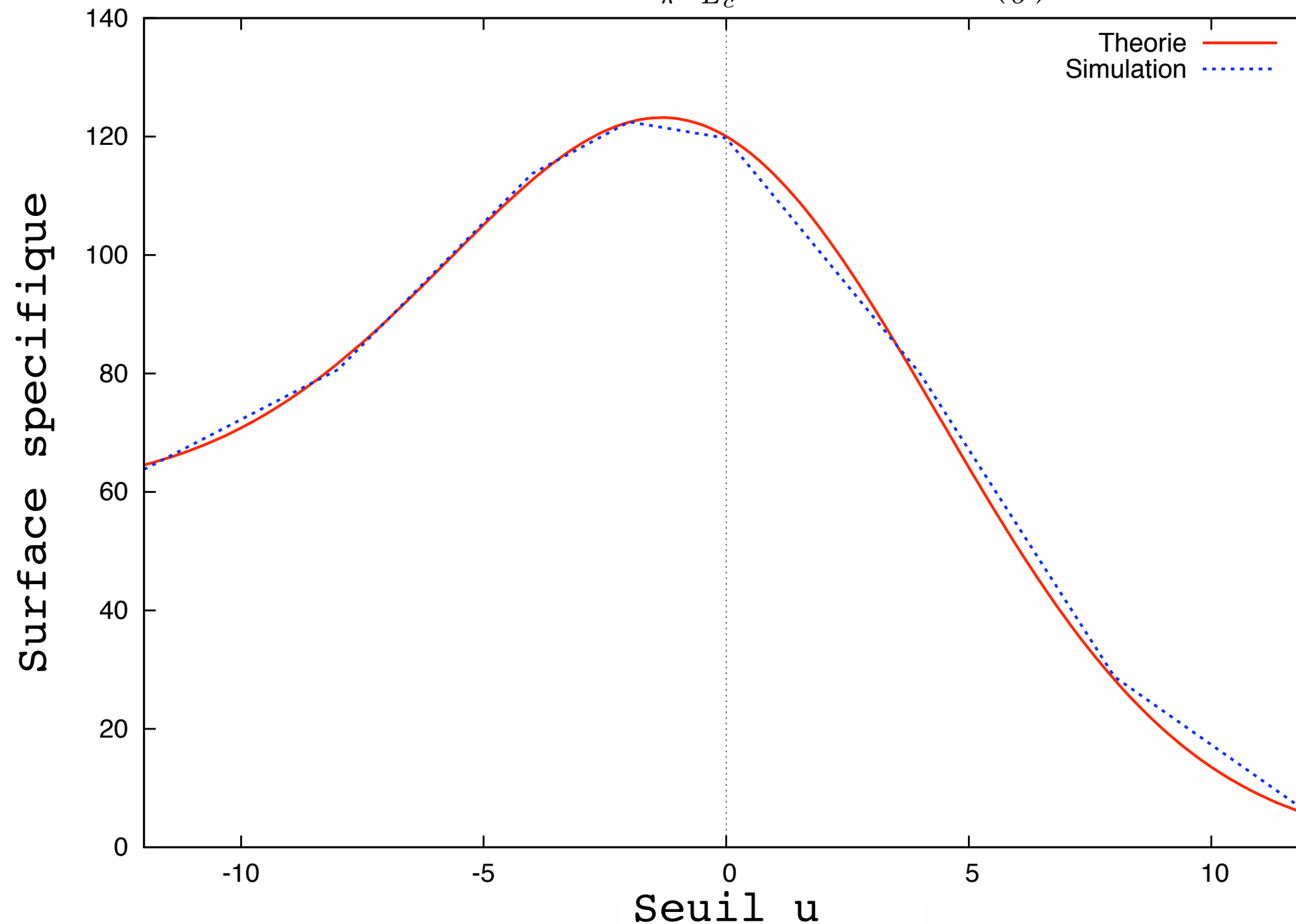
$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_3(A_u)\} = T^3 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$





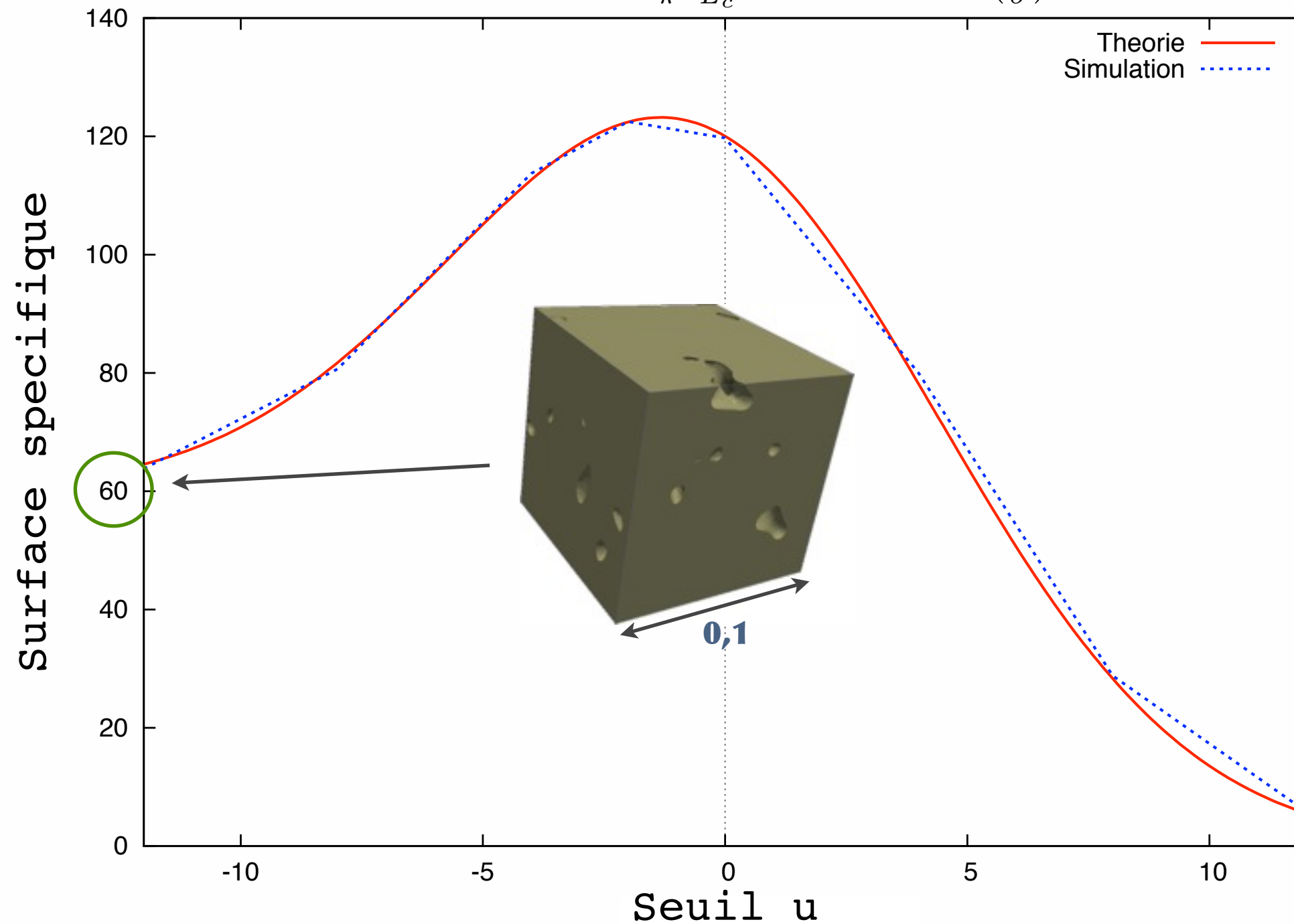
Validation de la surface spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_2(A_u)\} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{T^3}{L_c} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + 3T^2 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$



Validation de la surface spécifique

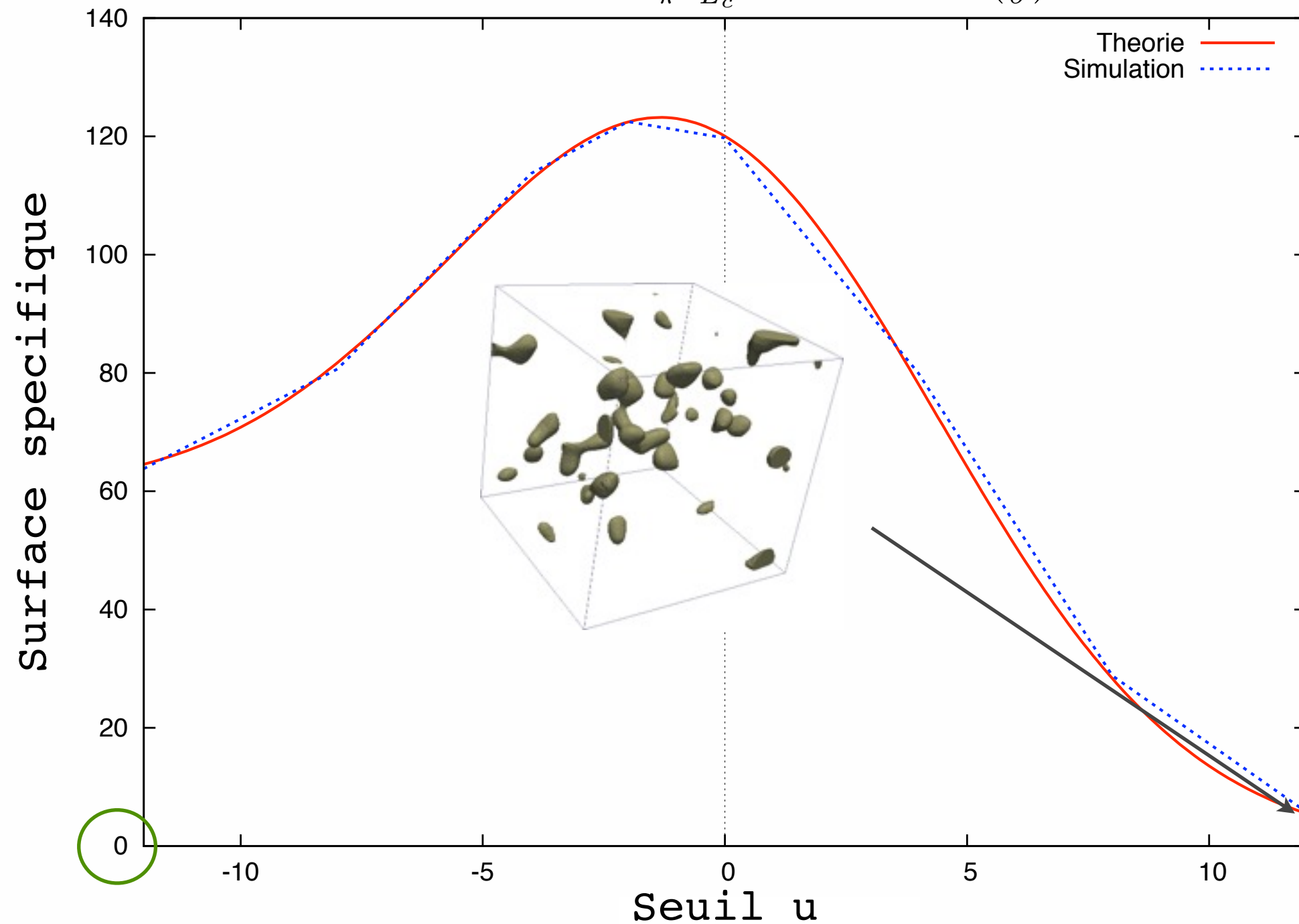
$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_2(A_u)\} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{T^3}{L_c} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + 3T^2 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$





Validation de la surface spécifique

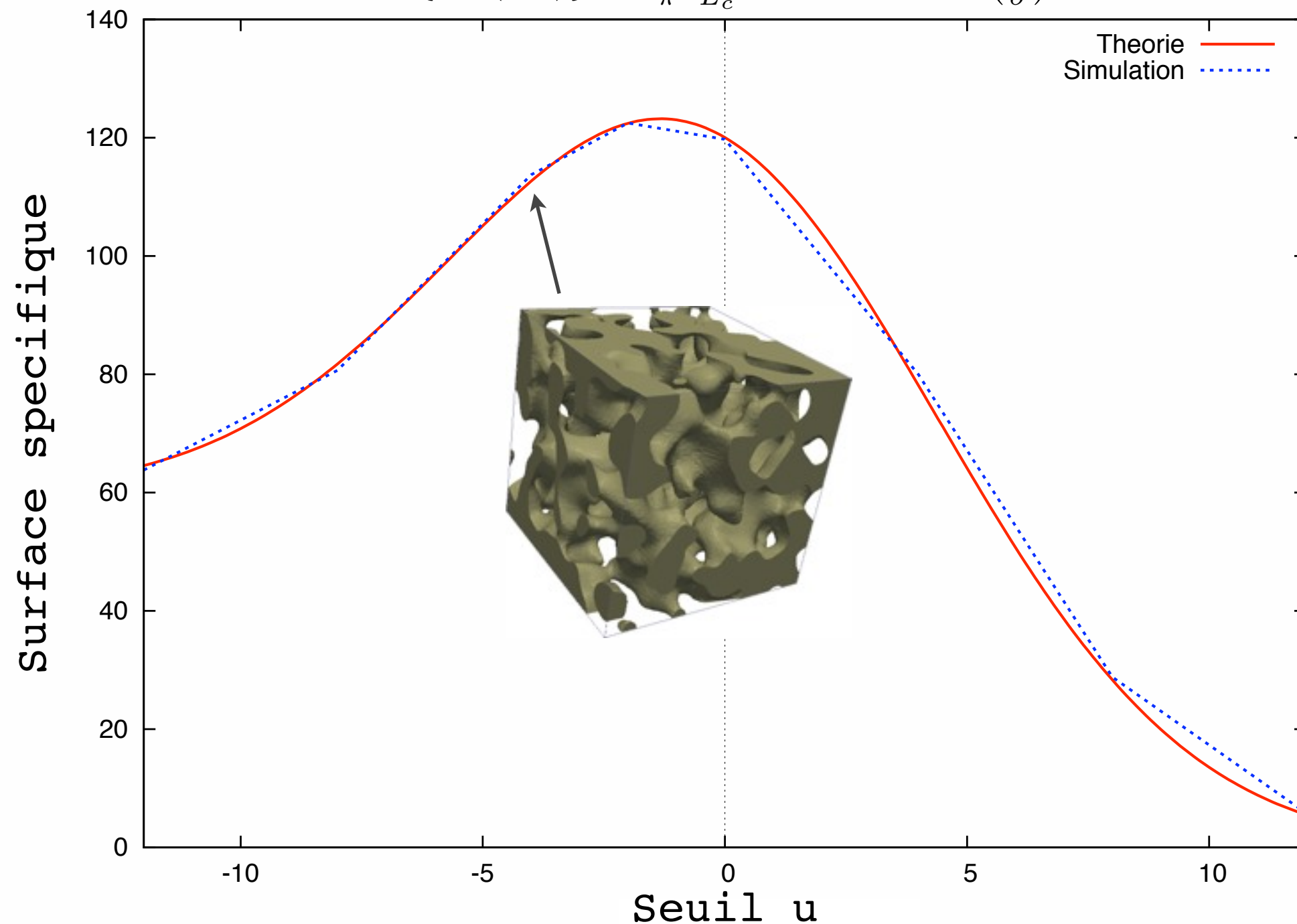
$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_2(A_u)\} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{T^3}{L_c} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + 3T^2 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$





Validation de la surface spécifique

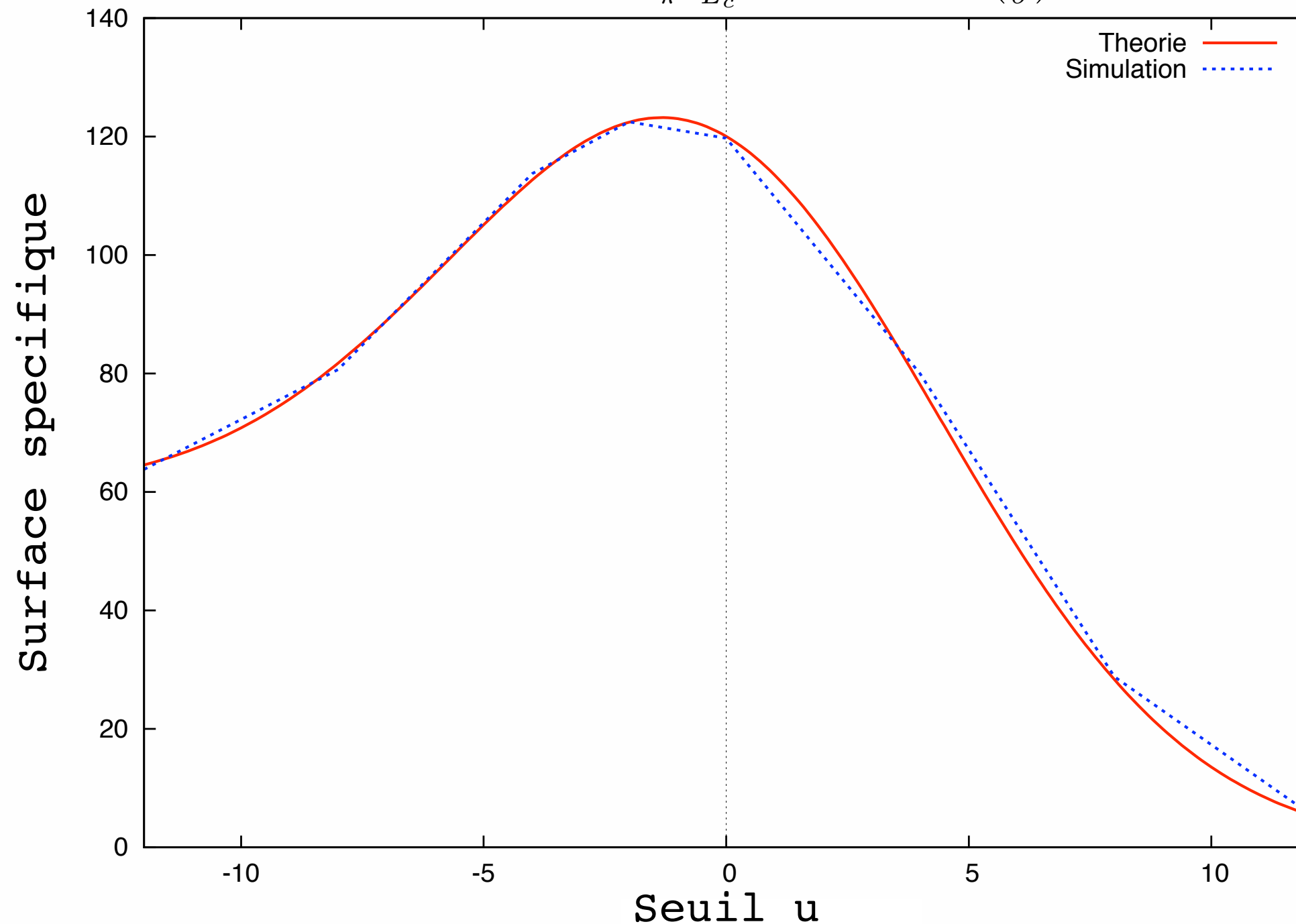
$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_2(A_u)\} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{T^3}{L_c} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + 3T^2 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$





Validation de la surface spécifique

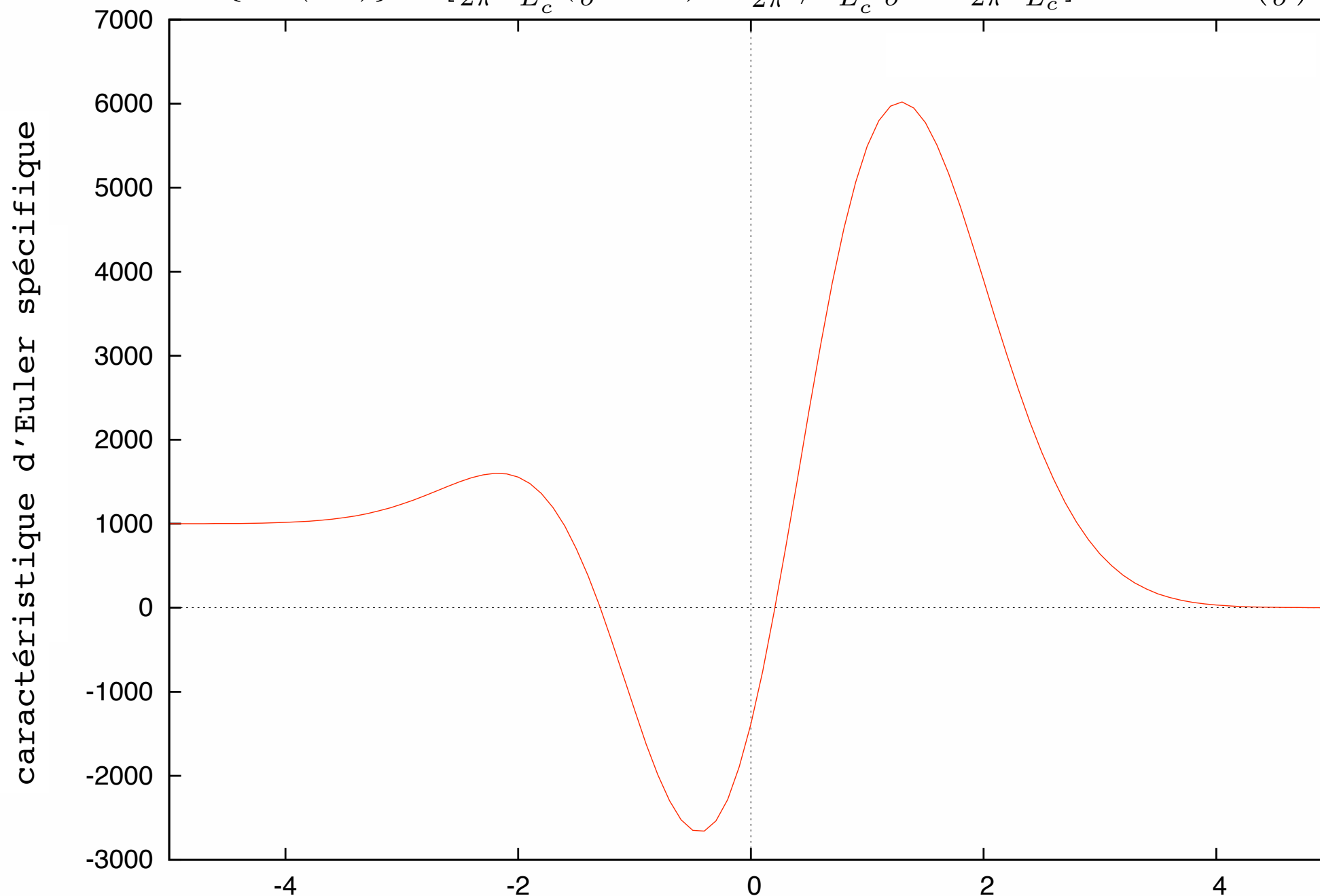
$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_2(A_u)\} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{T^3}{L_c} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + 3T^2 \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$





Validation de la caractéristique d'Euler spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_0(A_u)\} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \frac{T^3}{L_c^3} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^{3/2}} \frac{T^2}{L_c^2} \frac{u}{\sigma} + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \frac{T}{L_c} \right] e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$



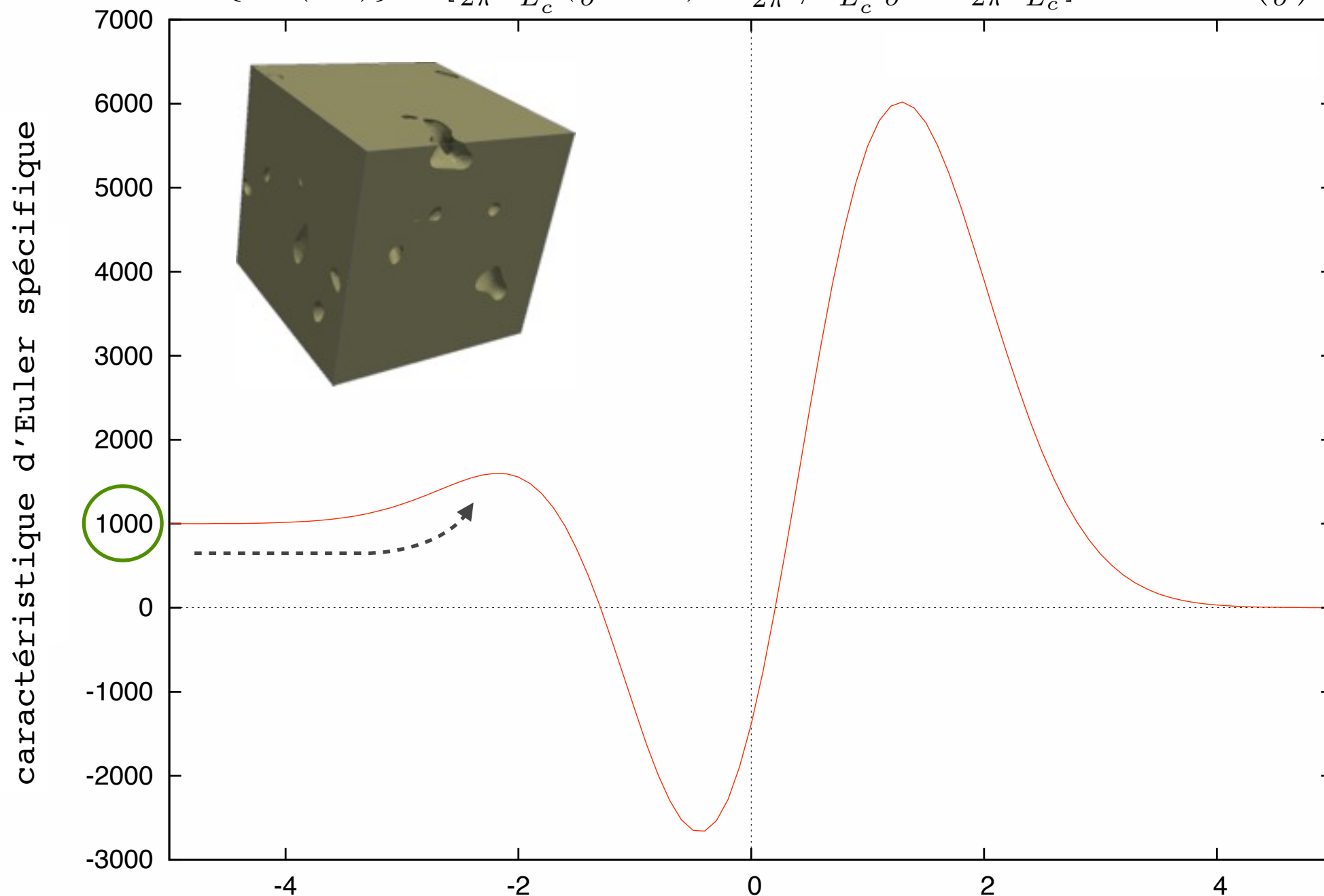
$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$

Seuil u



Validation de la caractéristique d'Euler spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_0(A_u)\} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \frac{T^3}{L_c^3} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^{3/2}} \frac{T^2}{L_c^2} \frac{u}{\sigma} + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \frac{T}{L_c} \right] e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$

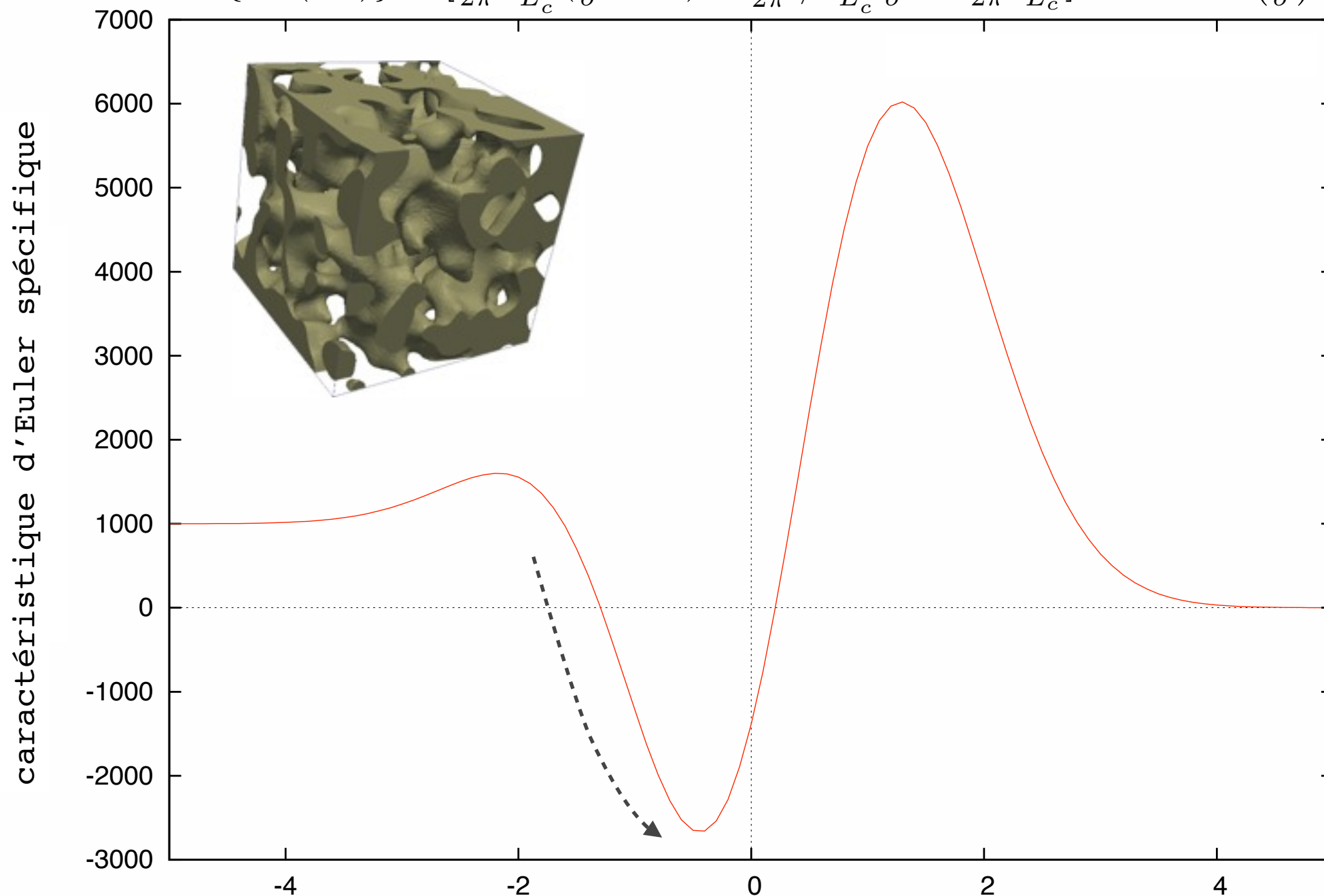


$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$



Validation de la caractéristique d'Euler spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_0(A_u)\} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \frac{T^3}{L_c^3} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^{3/2}} \frac{T^2}{L_c^2} \frac{u}{\sigma} + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \frac{T}{L_c} \right] e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$



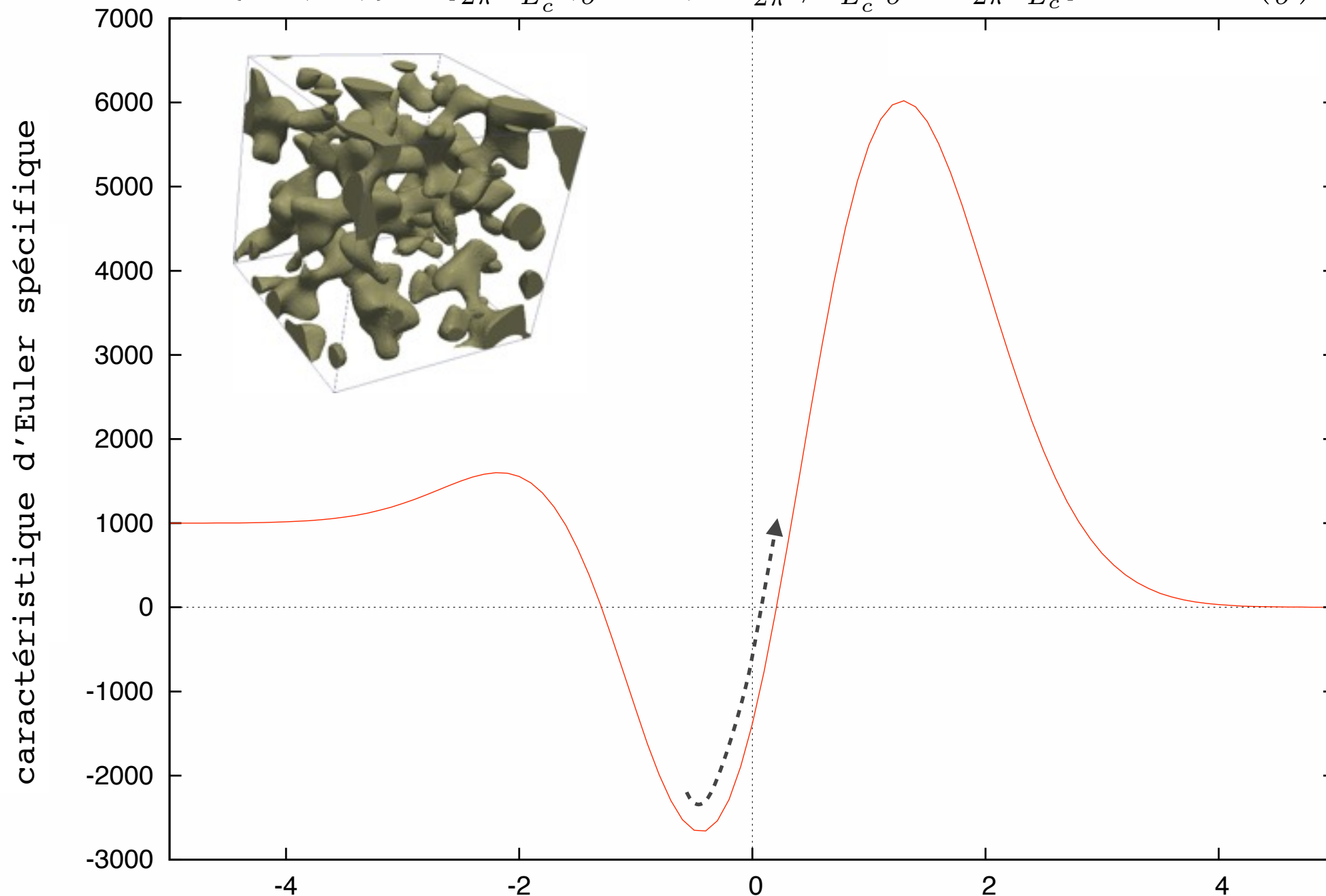
$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$

Seuil u



Validation de la caractéristique d'Euler spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_0(A_u)\} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \frac{T^3}{L_c^3} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^{3/2}} \frac{T^2}{L_c^2} \frac{u}{\sigma} + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \frac{T}{L_c} \right] e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$

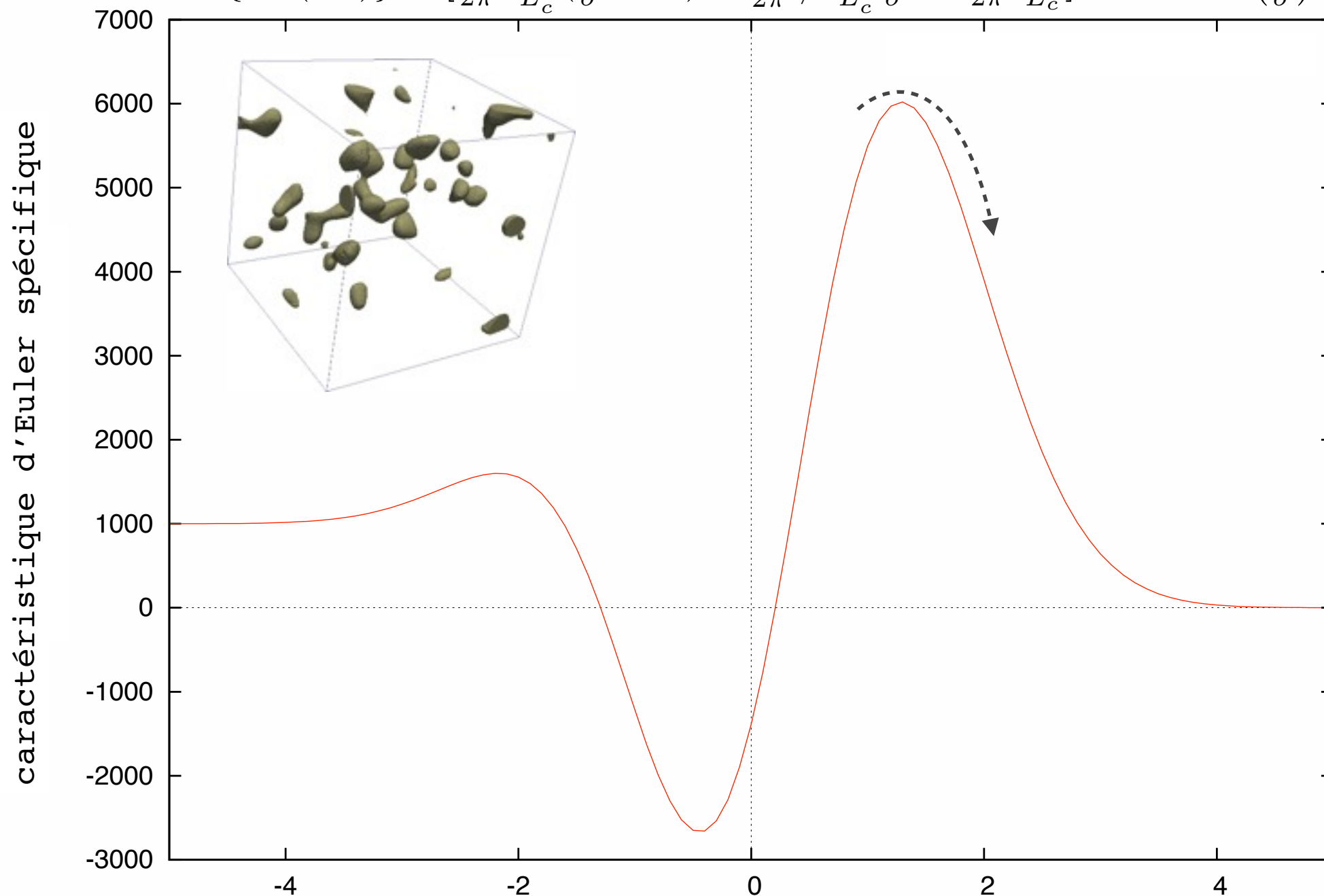


$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$



Validation de la caractéristique d'Euler spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_0(A_u)\} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \frac{T^3}{L_c^3} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^{3/2}} \frac{T^2}{L_c^2} \frac{u}{\sigma} + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \frac{T}{L_c} \right] e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$

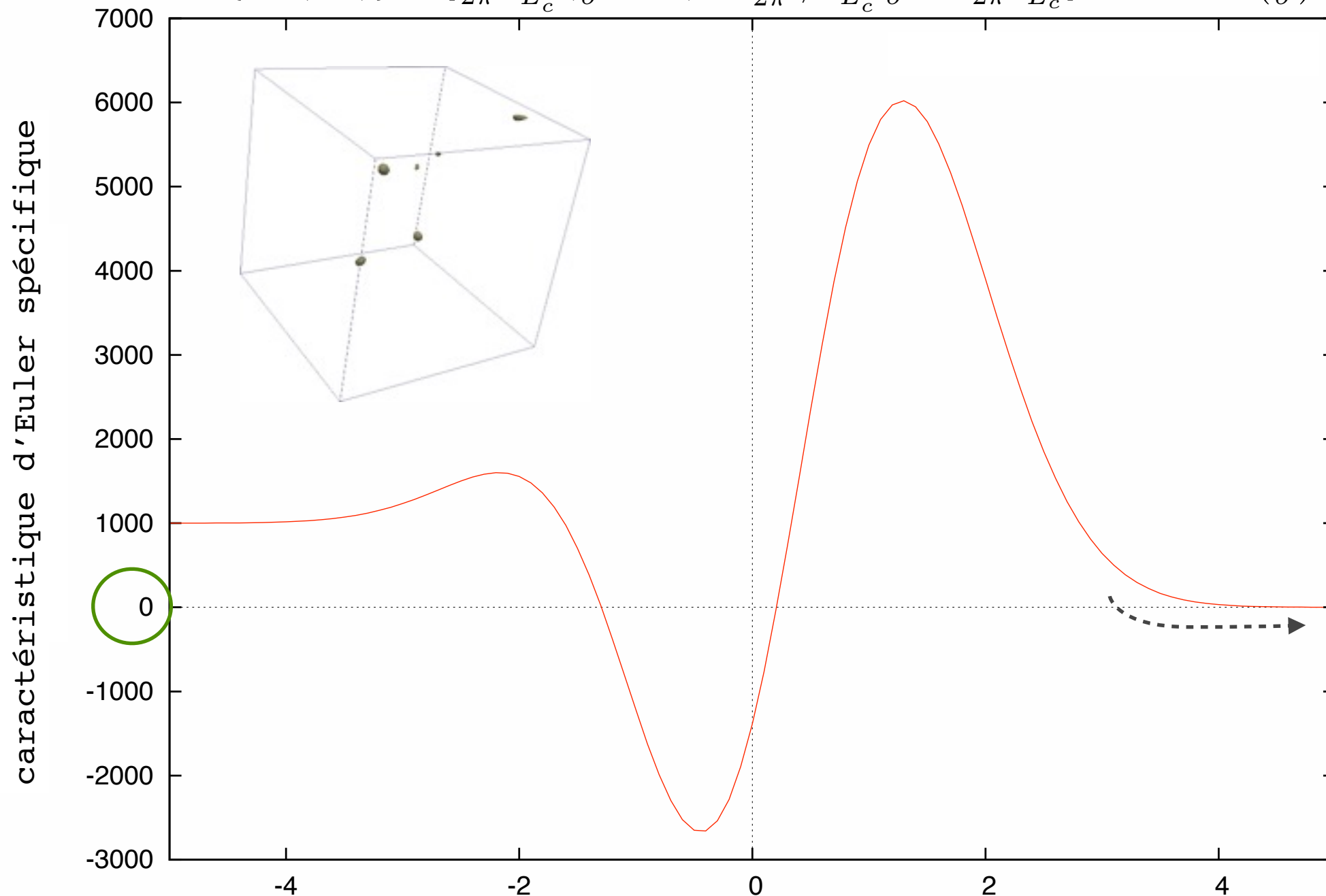


$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$



Validation de la caractéristique d'Euler spécifique

$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_0(A_u)\} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \frac{T^3}{L_c^3} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^{3/2}} \frac{T^2}{L_c^2} \frac{u}{\sigma} + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \frac{T}{L_c} \right] e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$



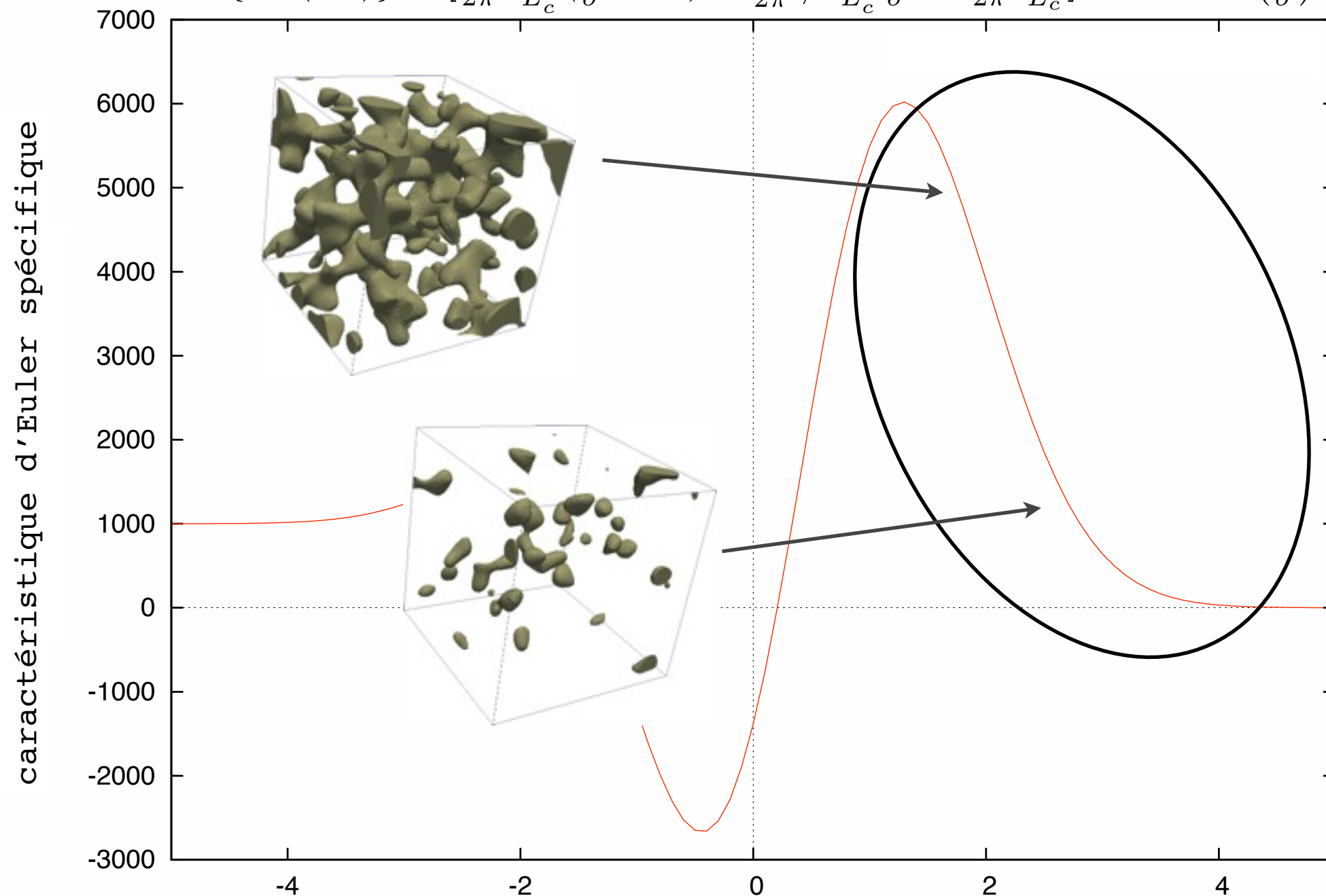
$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$

Seuil u



Validation de la caractéristique d'Euler spécifique

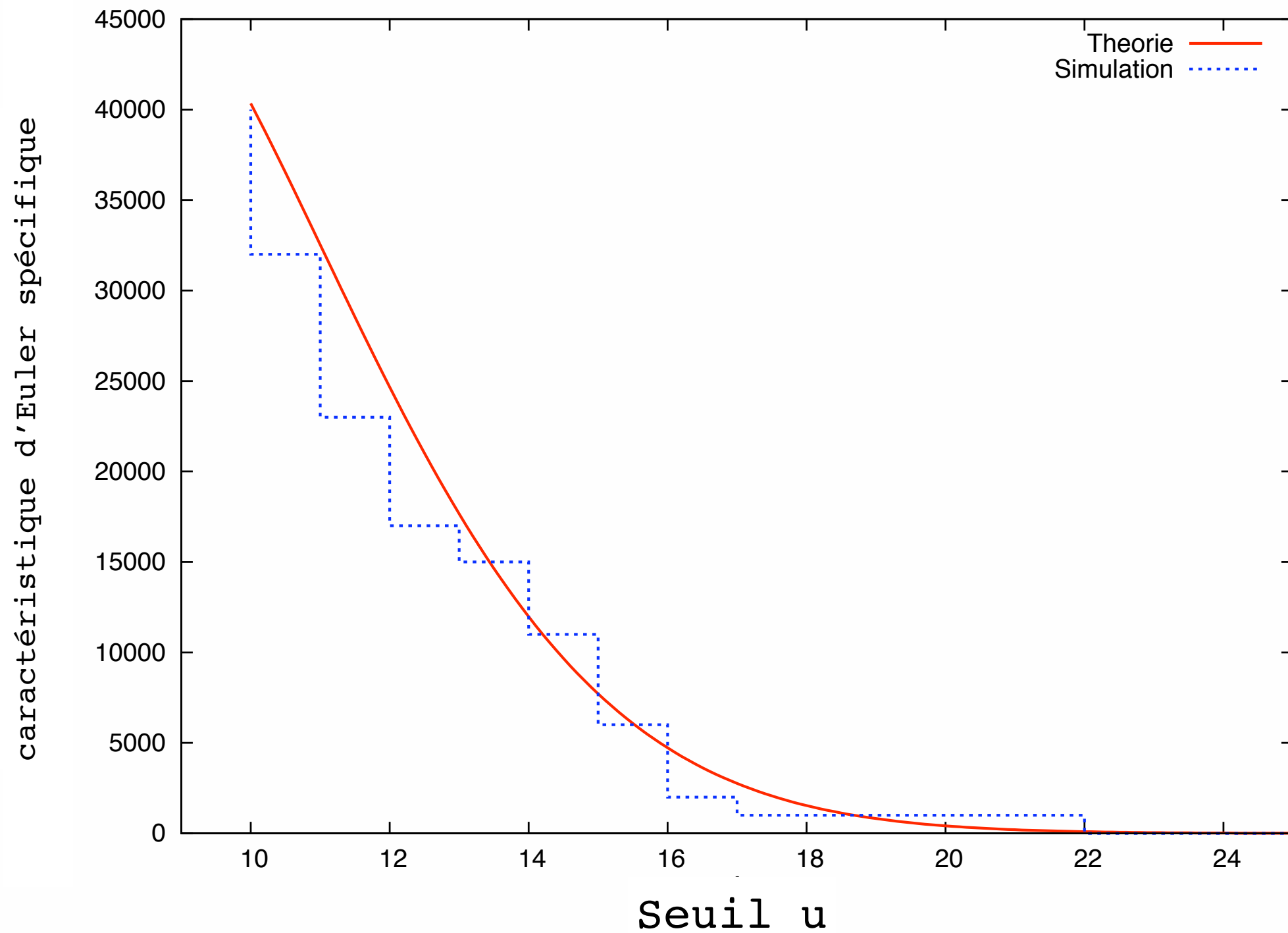
$$\mathbb{E}\{\mathcal{L}_0(A_u)\} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \frac{T^3}{L_c^3} \left(\frac{u^2}{\sigma^2} - 1 \right) + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi^{3/2}} \frac{T^2}{L_c^2} \frac{u}{\sigma} + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \frac{T}{L_c} \right] e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right)$$



$$\chi(A) = \#\{\text{'Composants connectés' dans } A\} - \#\{\text{'anses' dans } A\} + \#\{\text{'trous' dans } A\}$$

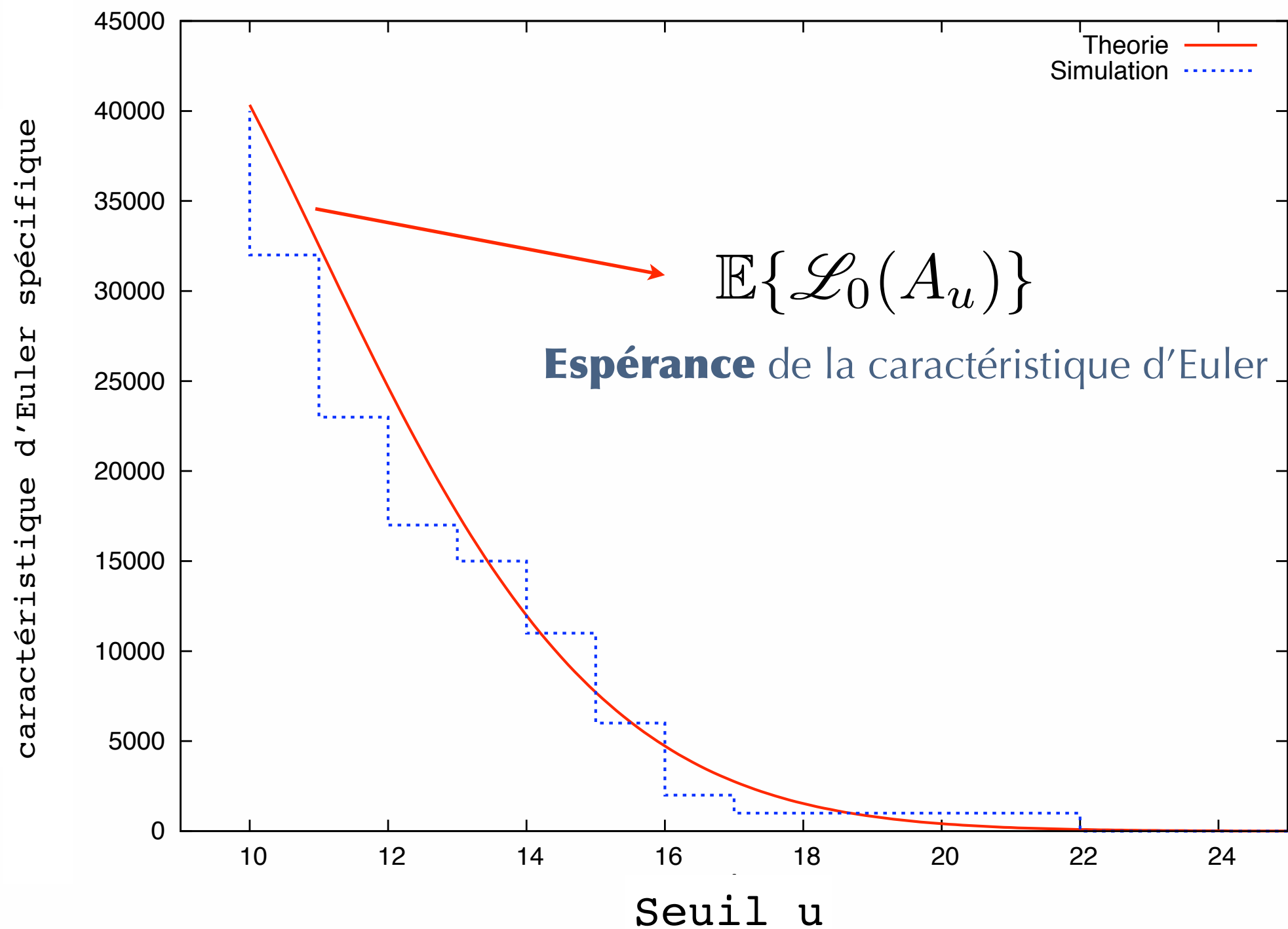


Validation de la caractéristique d'Euler



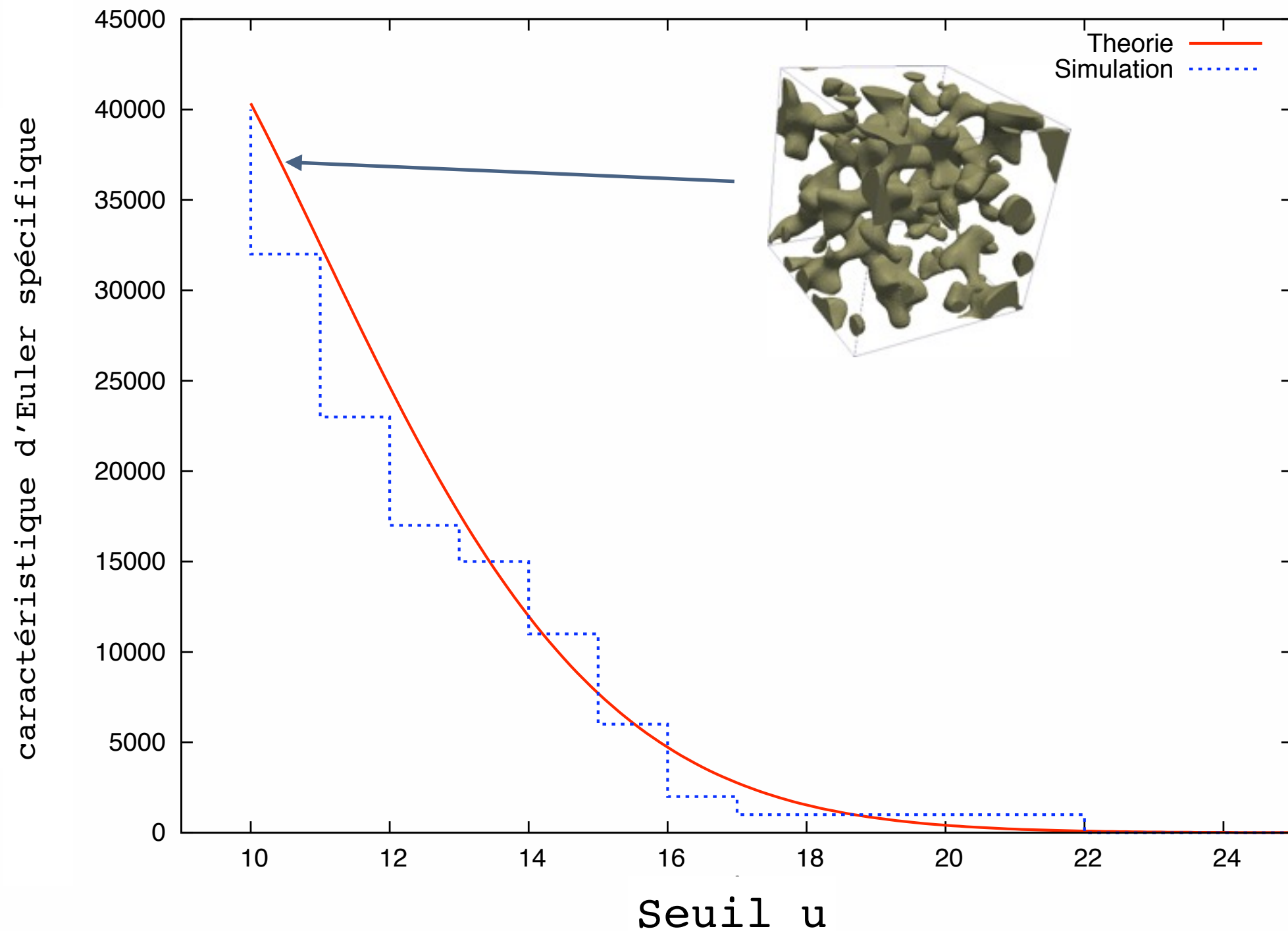


Validation de la caractéristique d'Euler



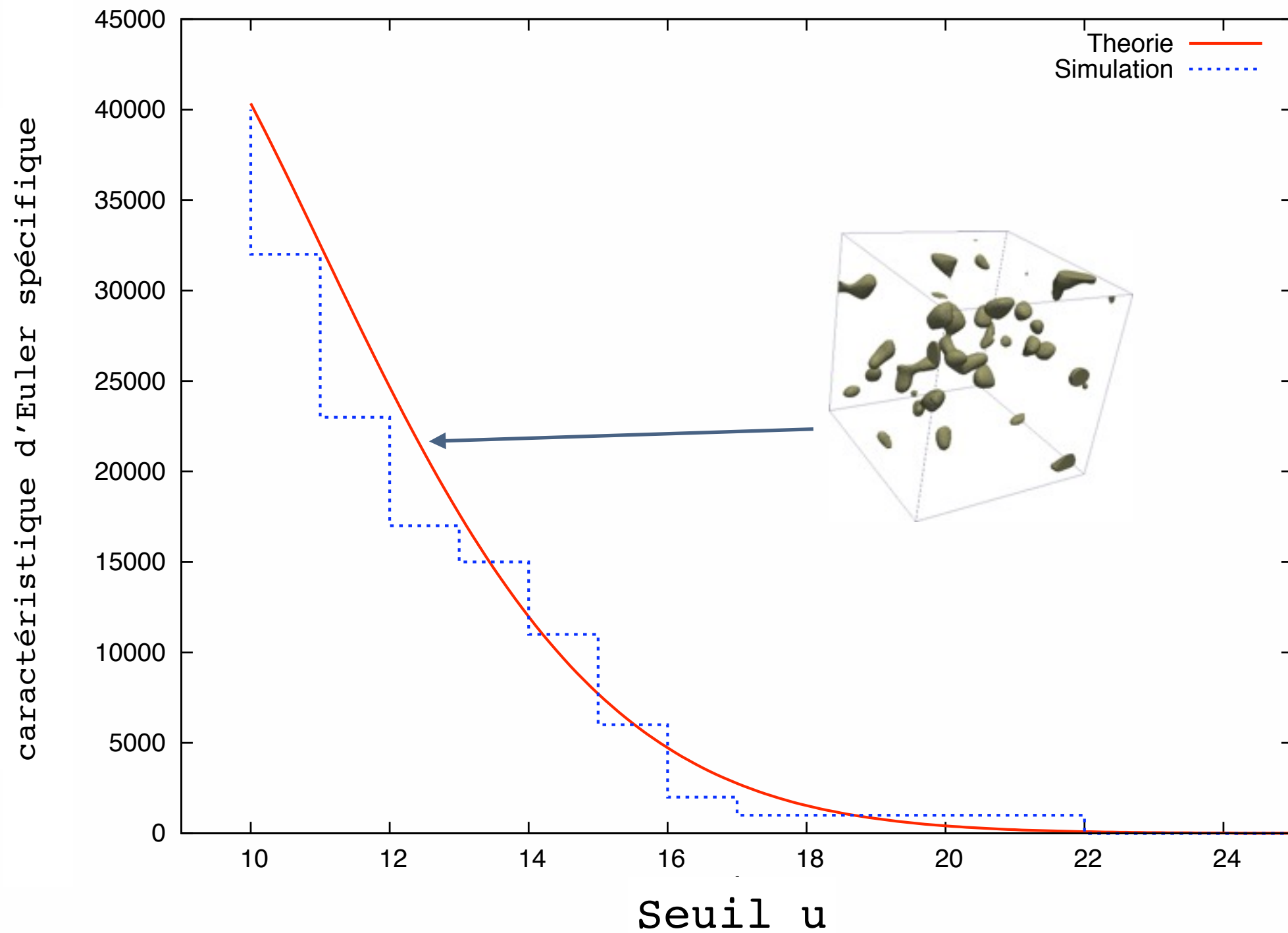


Validation de la caractéristique d'Euler



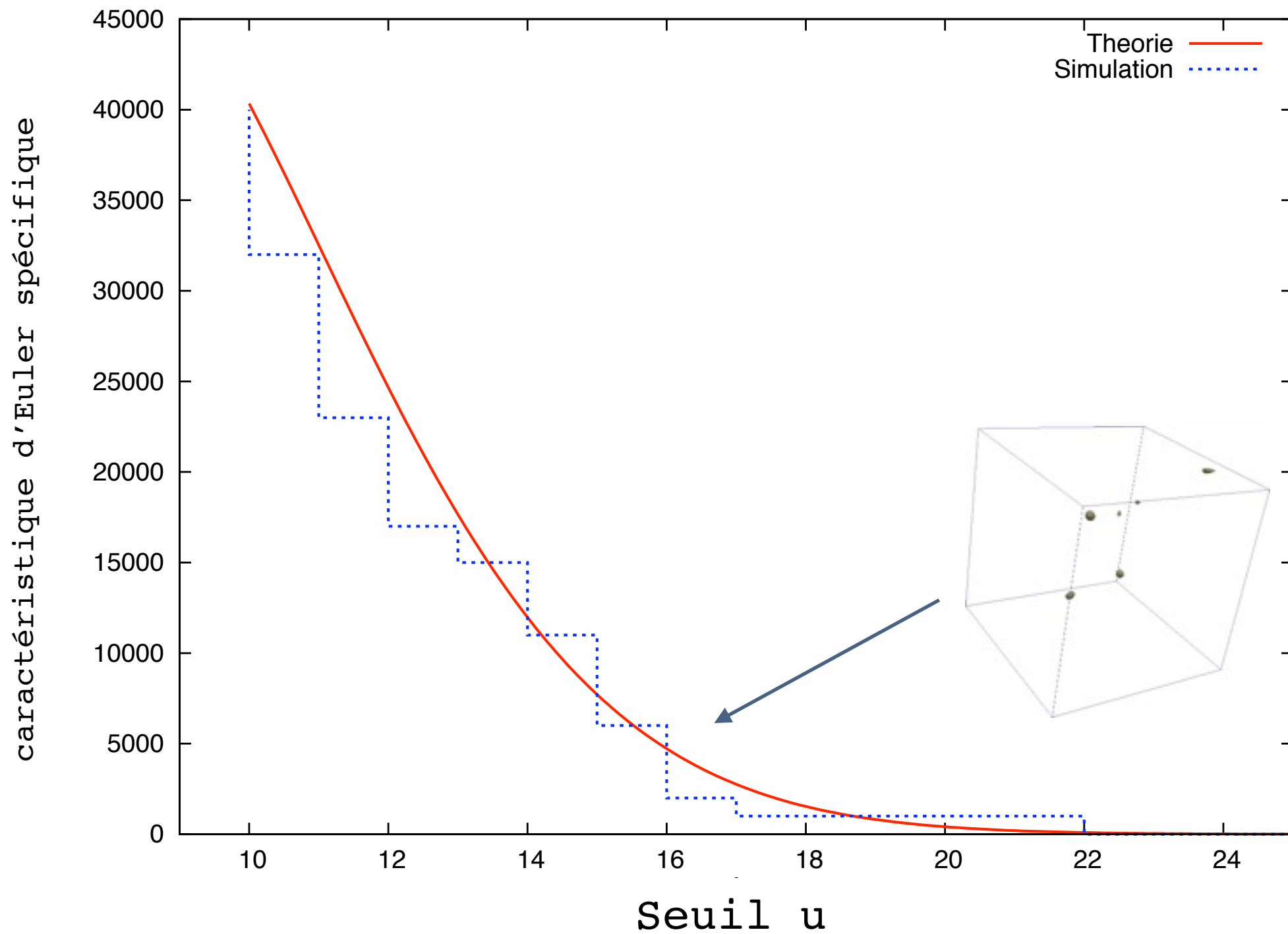


Validation de la caractéristique d'Euler



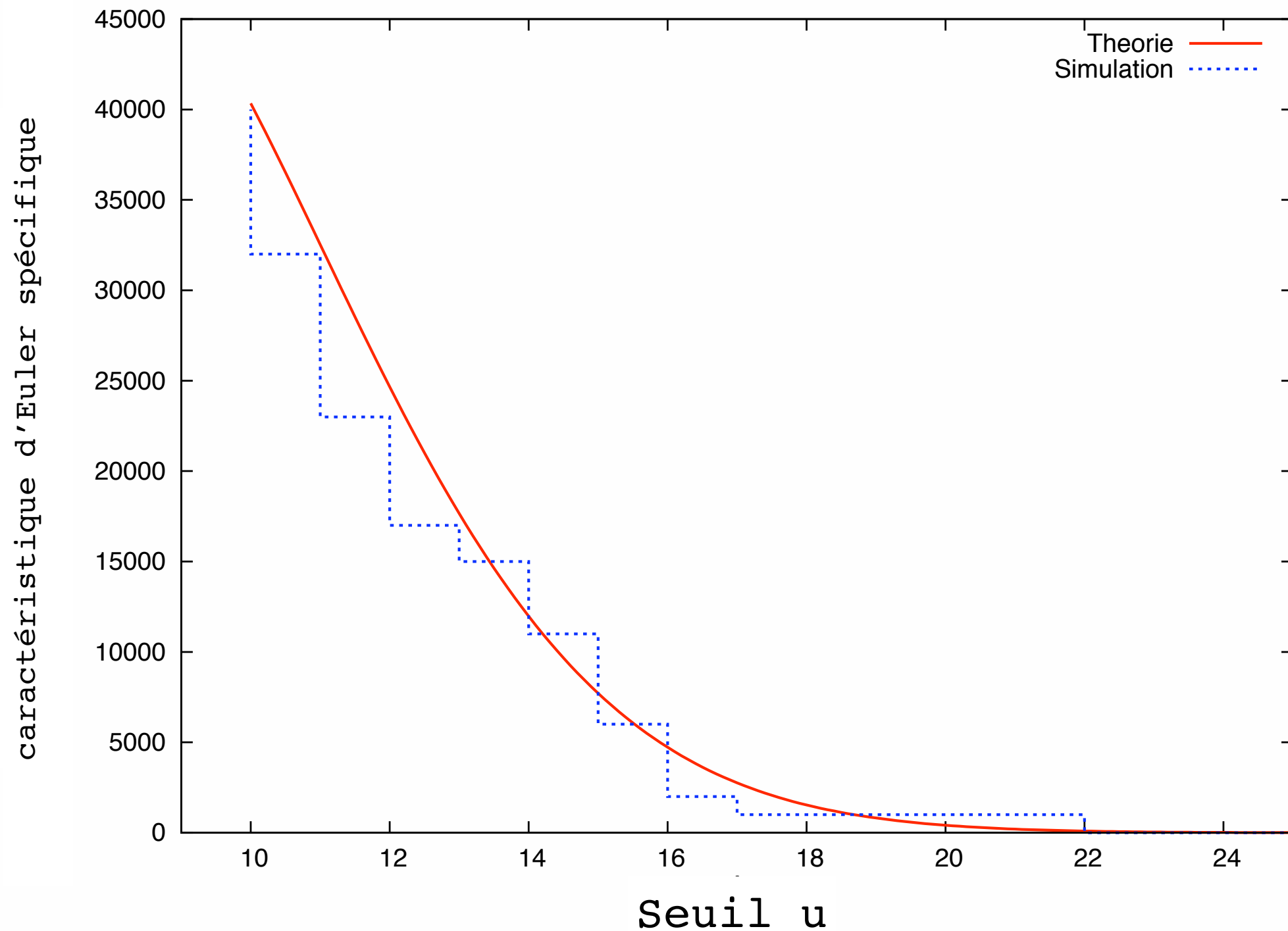


Validation de la caractéristique d'Euler

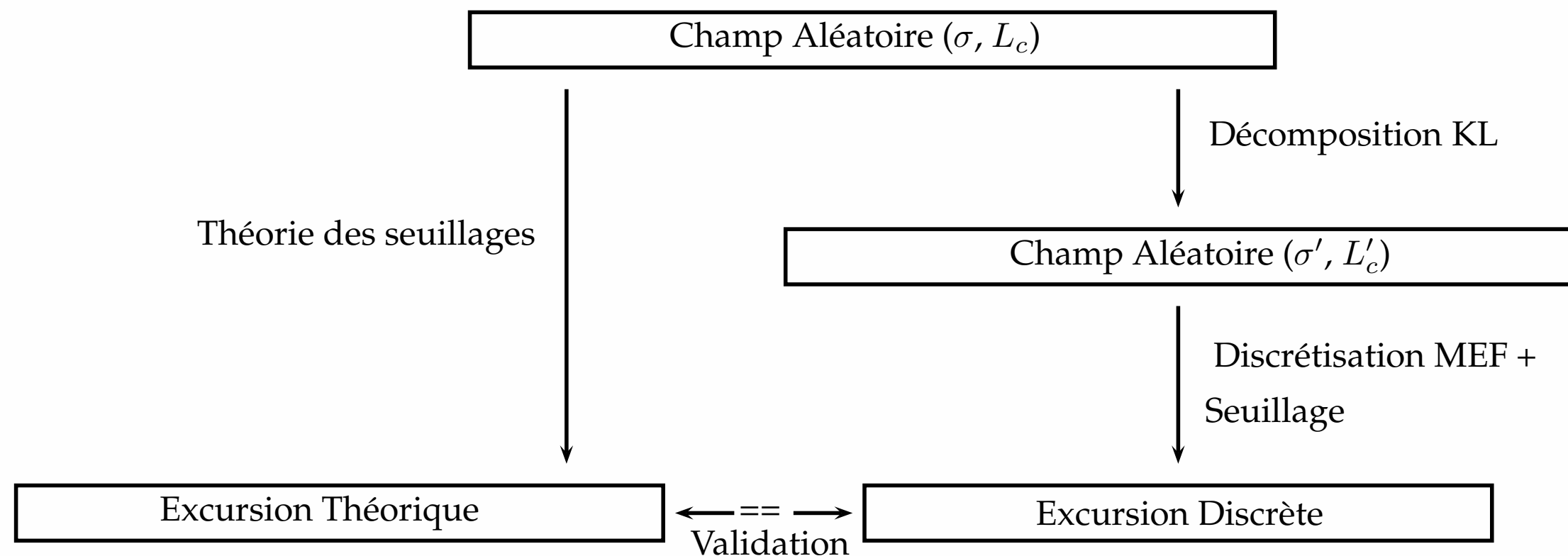




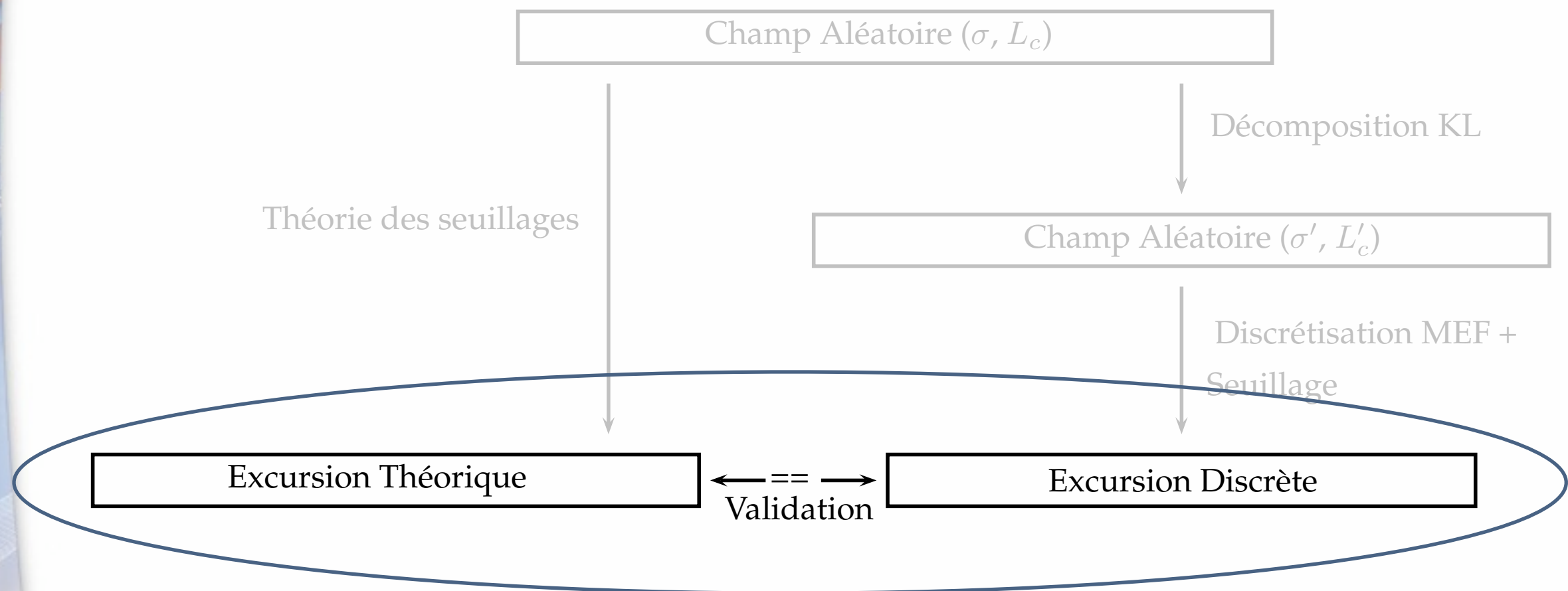
Validation de la caractéristique d'Euler



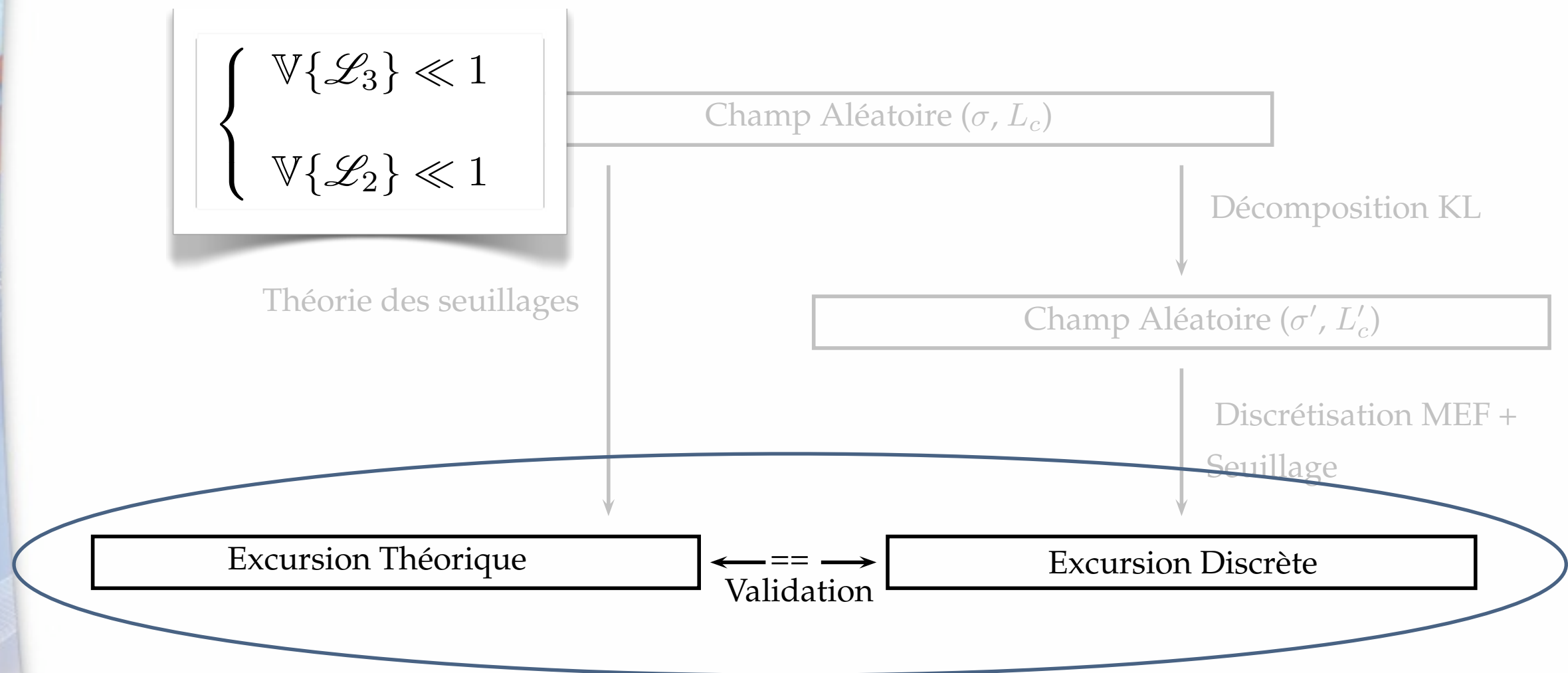
Validation du processus de seuillage



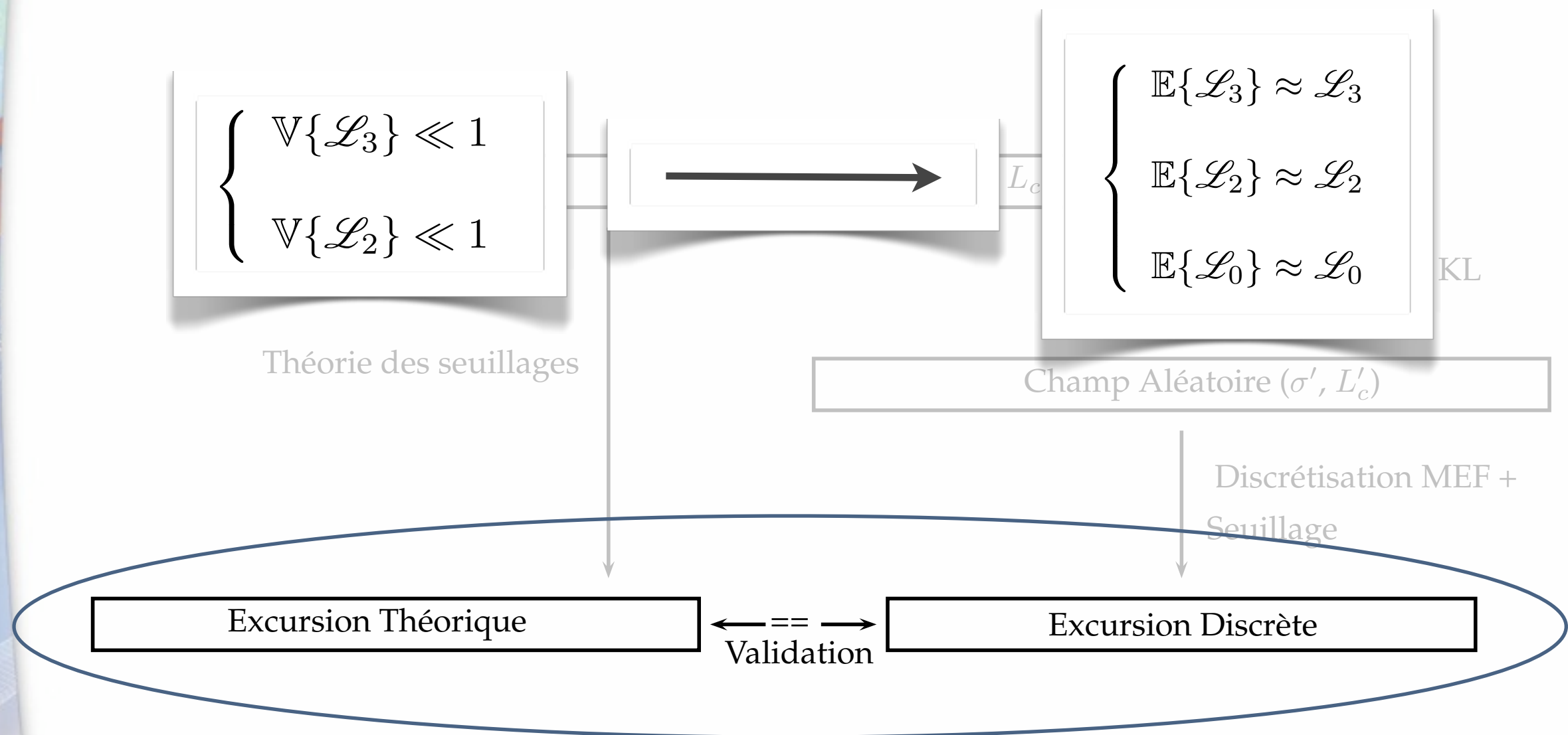
Validation du processus de seuillage



Validation du processus de seuillage

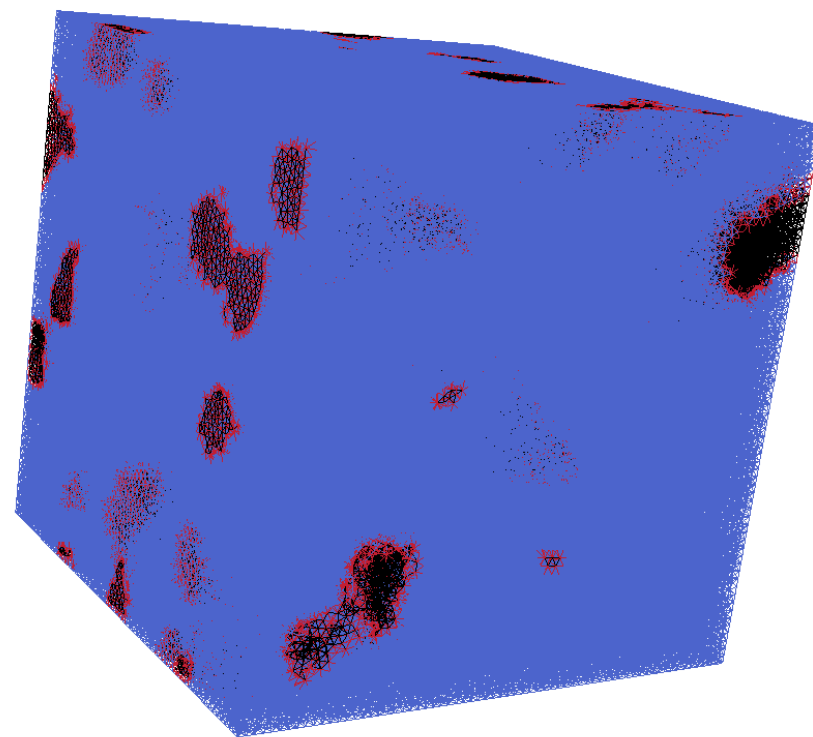


Validation du processus de seuillage



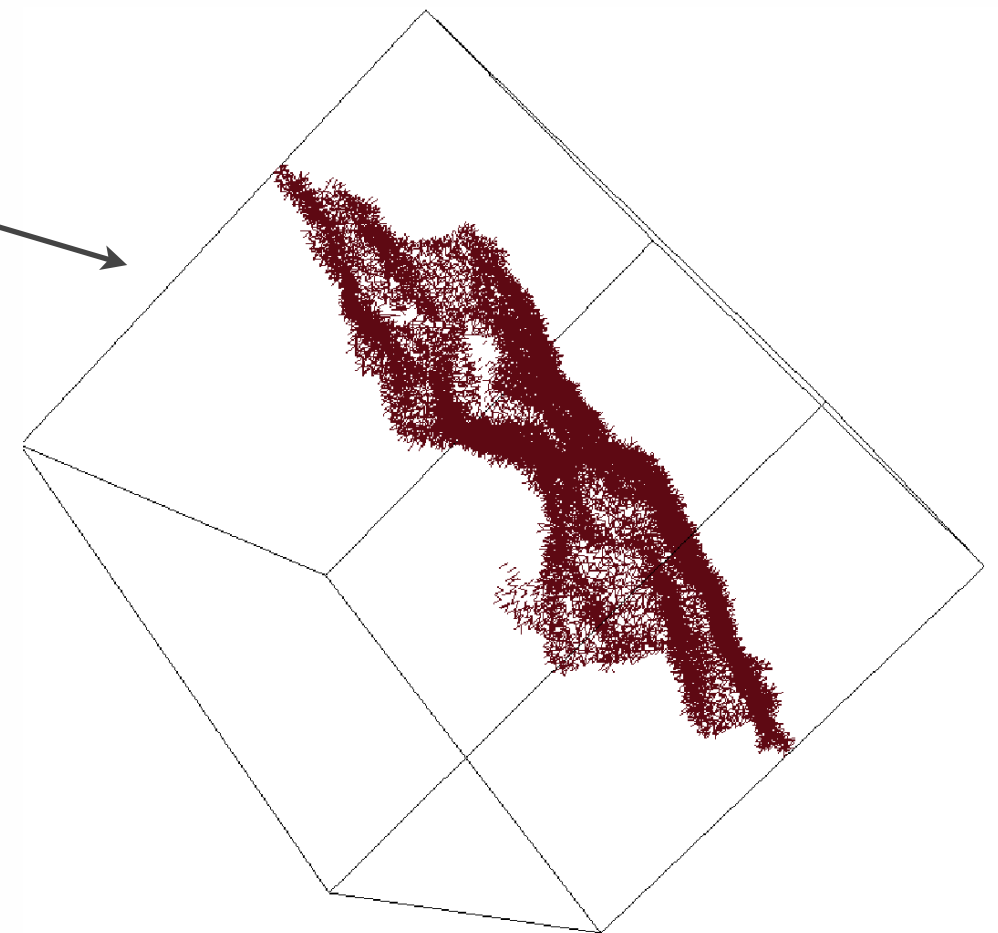
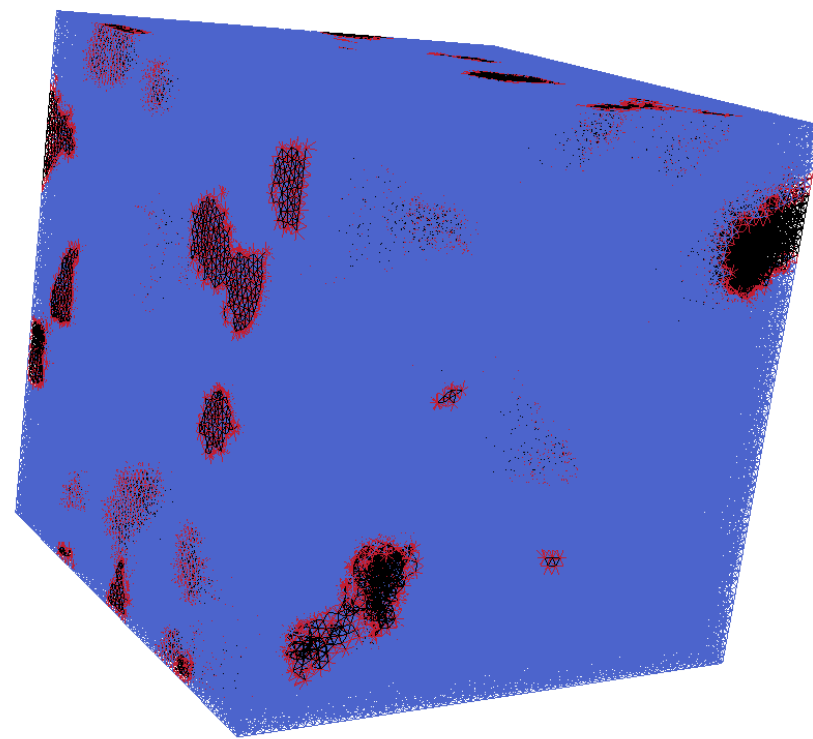
«Validation mécanique»

Projection du modèle dans un **treillis spatial**



«Validation mécanique»

Projection du modèle dans un **treillis spatial**



Calcul de **fissuration**



Principe et caractéristiques du modèle

- Principe du seuillage
- Influences des différences paramètres du modèle
- Caractéristiques géométriques et topologiques des excursions



Mise en oeuvre numérique et validation

- Décomposition de Karhunen-Loève
- Calcul des caractéristiques géométriques
- Validation



Conclusions et perspectives

Conclusion

- 📌 **Alternative aux modèles classiques** de représentation de matériaux hétérogènes (sphères non-recouvrantes),
- 📌 **Excursions** définies par **seuillages** de **réalisations** de **champs aléatoires corrélés**,
- 📌 Mise en oeuvre grâce à la décomposition de **Karhunen-Loève**,
- 📌 Validation du modèle numérique grâce à une **solution analytique**,
- 📌 Mise en application dans un **modèle de fissuration** pour matériaux hétérogènes.



Avantages et limites



Avantages :

- *formes non-régulières,*
- *contrôle des caractéristiques géométriques et topologiques,*
- *peu de paramètre (3, indépendants de l'étendu de l'échelle).*



Limites :

- *choix du champs et forme de la covariance (pour l'instant...)*

 Agrandissement de la gamme géométrique et topologique :

Adapter d'autres type de champs et de fonction de covariance.

 Représentations «multi-phases» :

Ajout de paramètre.

 Application à l'hydratation du béton :

Dépendance des excursion avec le temps.

Questions ?

